

Dr Andrzej K. Brodzik

## AUTOREFERAT

### 1. Wykształcenie i posiadane stopnie zawodowe:

- 1995         doktor nauk technicznych, dyscyplina: elektronika, praca pt. „Design of discrete Gabor expansion algorithms and an efficient realization of the Gerchberg-Papoulis algorithm in the Zak space”, advisor: prof. Richard Tolimieri, City College of New York, NY, USA.
- 1984         magister inżynier, dyscyplina: elektronika, praca pt. „Vital Signs Calculator”, Politechnika Gdańska.
- 1988-1995   Studia doktoranckie na Wydziale Elektroniki City College of New York, NY, USA.
- 1978-1984   i Studia magisterskie na Wydziale Elektroniki Politechniki Gdańskiej.
- 1974-1978   Liceum Ogólnokształcące w Brodnicy.

### 2. Zatrudnienie:

- 2016-current, Research Associate, Boston University, Boston, MA.
- 2001-2014, Lead Engineer, MITRE Corporation, Bedford, MA.
- 1997-2001, Senior Scientist, Solid State Scientific, Nashua, NH.
- 1996-1997, Senior Scientist, Scientific Software, Woburn, MA.
- 1995-1996, Research Professor, Tufts University, Electro-Optics Technology Center, Medford, MA.
- 1989-1995, Software Engineer, IBM, Large Scale Computing Division, Kingston / Poughkeepsie, NY.
- 1988-1989, Adjunct Lecturer, City University of New York, Electrical Engineering Department, NY.

### 3. Wskazane osiągnięcia wynikające z ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule z zakresu sztuki (Dz.U. nr 65, poz. 595 ze zm., 14.03.2003)

#### a) Tytuł osiągnięcia naukowego:

„Dwa ogólne problemy estymacji sygnałów w przestrzeni Zaka i system do analizy i syntezy sekwencji wielofazowych ze specjalnymi właściwościami korelacyjnymi w przestrzeni Zaka ”.

#### b) Publikacje wchodzące w skład jednotematycznego cyklu publikacji (14, w tym 8 jednoautorskich)

Publikacje w czasopismach indeksowanych w bazie ISI JCR (7):

- [1] **A. K. Brodzik** and R. Tolimieri, *Extrapolation of Band-Limited Signals and the Finite Zak Transform*, Signal Processing, Vol. 80, No. 3., March 2000, pp 413-423, **IF: 1.9, MNiSW: 15.**
- [2] A. Joseph, **A. K. Brodzik** and R. Tolimieri, *Under-sampled Weyl-Heisenberg Expansions by Orthogonal Projections in Zak Space*, Signal Processing, Vol. 81, No. 11, November 2001, pp 2383-2402, **IF: 1.9, MNiSW: 15.**

- [3] **A. K. Brodzik**, *Signal Extrapolation in the Real Zak Space*, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 50, No. 8, August 2002, pp 1957-1965, **IF: 2.8, MNiSW: 24**.
- [4] **A. K. Brodzik**, *On the Fourier transform of finite chirps*, IEEE Signal Processing Letters, Vol. 13, No. 9, September 2006, pp 541-544, **IF: 1.7, MNiSW: 20**.
- [5] **A. K. Brodzik**, *Characterization of Zak space support of the finite chirp*, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 53, No. 6, June 2007, pp 2190-2203, **IF: 2.6, MNiSW: 24**.
- [6] **A. K. Brodzik** and R. Tolimieri, *Bat chirps with good properties: Zak space construction of perfect polyphase sequences*, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 55, No. 4, April 2009, pp 1804-1814, **IF: 2.6, MNiSW: 24**.
- [7] **A. K. Brodzik**, *On certain polyphase sequence sets with semi-polyphase Zak and Fourier transforms*, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 59, No. 10, pp 6907-6916, October 2013, **IF: 2.6, MNiSW: 40**.

Monografie (1)

- [8] M. An, **A. K. Brodzik** and R. Tolimieri, *Ideal sequence design in time-frequency space, applications to radar, sonar and communication systems*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Springer, Boston, 2008.

Rozdziały w monografiach (1)

- [9] **A. K. Brodzik**, *Polyphase Golay sequences with semi-polyphase Fourier transform and all-zero crosscorrelation: Construction B*, Excursions in Harmonic Analysis, Volume 3: The February Fourier Talks at the Norbert Wiener Center, Radu Balan and Matthew Begué (Eds), Springer, 2015, pp 3-21.

Publikacje recenzowane (konferencje zagraniczne) po uzyskaniu stopnia doktora (5)

- [10] **A. K. Brodzik** and R. Tolimieri, *Gerchberg-Papoulis Algorithm and the Finite Zak Transform*, SPIE International Symposium on Optical Science, Engineering and Instrumentation, Vol. 4119, San Diego, July 2000, pp 1084-1093.
- [11] **A. K. Brodzik**, *De-noising and parameter estimation of linear FM chirps in the Zak space*, International Waveform Diversity and Design Conference, Hawaii, January 2006.
- [12] **A. K. Brodzik** and R. Tolimieri, *Polyphase sequence design in time-frequency space*, Waveform Diversity and Design Conference, Orlando, February 2009.
- [13] **A. K. Brodzik**, *On Design of Perfect Polyphase Sequence Sets Satisfying the Distinct Difference Condition*, International Workshop for Signal Design and Applications, Guilin, China, October 2011.
- [14] **A. K. Brodzik**, *Design of polyphase zero correlation zone sequence sets with all-zero cross-correlation*, International Symposium on Information Theory, Boston, MA, 2012.

**c) Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania**

Przestrzeń Zaka to przestrzeń sygnałowo-teoretyczna która jest pośrednią przestrzenią pomiędzy przestrzenią czasową i przestrzenią częstotliwościową Fouriera. Jako wspólna przestrzeń czasowo-częstotliwościowa, przestrzeń Zaka umożliwia jednocześnie oszacowanie czasowych i częstotliwościowych właściwości sygnałów, jak również zapewnia dogodne warunki do estymacji widmowej i do projektowania sygnałów czasowo-częstotliwościowych o specjalnych właściwościach. Przestrzeń Zaka jest szczególnie dogodna dla przetwarzania sygnałów z kompaktową reprezentacją czasowo-częstotliwościową, ponieważ obliczenia w tym przypadku mogą być wykonywane bardziej efektywnie niż w bezpośrednich przestrzeniach, lub też analiza w przestrzeni Zaka może ujawnić właściwości sygnału, które są trudne do obserwacji w bezpośrednich przestrzeniach. W tej pracy podsumowuje kilka projektów zrealizowanych przeze mnie, w ramach jednotematycznego cyklu publikacji, gdzie przetwarzanie sygnałów w przestrzeni Zaka umożliwiło jednocześnie zwiększenie efektywności obliczeń i dokonanie nowych odkryć koncepcyjnych.

Ponieważ metody przestrzeni Zaka nie są metodami dobrze znanymi w teorii przetwarzania sygnałów, zaczniemy od krótkiego wprowadzenia do głównego narzędzia stosowanego w tej dziedzinie - skończonej transformacji Zaka. Transformacja Zaka może być opisana w sposób zwięzły poprzez przedstawienie jej w kontekście transformacji Fouriera. Przyjmijmy że  $x$  jest dowolną  $N$ -okresową sekwencją w  $\mathcal{C}^N$  i zdefiniujmy  $e_N(n) := e^{2\pi in/N}$ , jako  $N$ -ty pierwiastek z jedynki. Wtedy *dykretna transformacja Fouriera* (DFT) z  $x$  jest dana poprzez

$$\mathbf{x}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e_N(nm), \quad 0 \leq m < N. \quad (1)$$

Załóżmy że  $N = LM$ , gdzie  $L$  i  $M$  są pozytywnymi liczbami całkowitymi, i przyjmijmy że  $n = k + rM$ ,  $m = j + sL$ ,  $0 \leq k, s < M$ ,  $0 \leq r, j < L$ . Wtedy wartości  $\mathbf{x}(m)$  na zbiorze zdecydowanym, powiedzmy  $m = j + 0L$ , są dane poprzez

$$\mathbf{x}(j) = \sum_{k=0}^{M-1} e_N(jk) \sum_{r=0}^{L-1} x(k + rM)e_L(rj). \quad (2)$$

Wewnętrzna suma w (2) jest zdefiniowana jako *skończona transformacja Zaka* (FZT) z  $x$  [32], i.e.,

$$X_L(j, k) = \sum_{r=0}^{L-1} x(k + rM)e_L(rj). \quad (3)$$

Stąd wynika że obliczenie  $X_L$  wymaga obliczenia  $M$   $L$ -punktowych DFTs sekwencji

$$x(k), x(k + M), \dots, x(k + (L - 1)M), \quad 0 \leq k < M. \quad (4)$$

Dla  $L = N$  i  $M = 1$  FZT  $X_N$  jest identyczna z DFT z  $x$ . Dla  $L = 1$  i  $M = N$  FZT  $X_1$  jest identyczna z  $x$ . FZT posiada kilka zastosowań w matematyce, mechanice kwantowej i analizie sygnałów.

Zarówno ciągła transformacja Zaka jak też i FZT odgrywają ważną rolę w analizie reprezentacji czasowo-częstotliwościowych, w tym funkcji ambiguity i ekspansji Weyl-Heisenberga, i w oszacowaniu sygnałów niestacjonarnych, w szczególności w przetwarzaniu sygnałów mowy, radarowych i sonarowych. Szerszy przegląd teorii transformacji Zaka i tło historyczne są zawarte w [24].

Dwa z wymienionych problemów, projektowanie algorytmów do obliczeń ekspansji Weyl-Heisenberga i widmowa ekstrapolacja, zaadresowałem wcześniej w [1-3], w ramach monotematycznego cyklu publikacji. Ta praca została podjęta podczas mojego pobytu w Air Force Research Laboratory w Bedford, MA.

Warto zauważyć, że podczas gdy transformacja Zaka nie jest jedynym narzędziem czasowo-częstotliwościowym, i wiele systemów czasowo-częstotliwościowych zostało zaproponowane do czasowo-częstotliwościowego lub niestacjonarnego przetwarzania sygnałów, w tym systemy bazowane na dystrybucji Wignera, spektrogramie, falkach, fractalnej transformacji Fouriera, i transformacji Radon-ambiguity, analiza bazowana na przestrzeni Zaka jest wyjątkowa wśród wszystkich metod czasowo-częstotliwościowych w kilku ważnych aspektach. Po pierwsze, transformacja Zaka jest ściśle związana z transformacją Fouriera, i dlatego analiza w przestrzeni Zaka jest bezpośrednim uogólnieniem analizy w przestrzeni Fouriera. Po drugie, ponieważ transformacja Zaka jest liniowa, nie pojawiają się w analizie Zaka „cross-terms”, które pojawiają się w kwadratowych reprezentacjach czasowo-częstotliwościowych, takich jak dystrybucja Wignera. Po trzecie, transformacja Zaka nie wymaga korzystania z sygnału okna, który często zwiększa złożoność i czasami oddziałują negatywnie na stabilność obliczeń. Wreszcie analiza bazowana na *skończonej* transformacji Zaka prowadzi do prostego i jednocześnie precyzyjnego sformułowania warunków kompaktowego wsparcia „chirps”, które są spełnione przez dużą klasę sygnałów wielofazowych i pół-wielofazowych, co jest jednym z głównych rezultatów opisaną tu pracy.

### **Obliczanie pod-próbkowanych ekspansji Weyl-Heisenberga**

W mojej poprzedniej pracy FZT została wykorzystana w konstrukcji algorytmów do obliczeń krytycznie próbkowanych i nad-próbkowanych ekspansji Weyl-Heisenberga [15], [18]. Rozszerzając tę pracę w [2], zaproponowałem (wspólnie z Joseph i Tolimieri) nowe podejście do przetwarzania sygnałów, bazowane na analizie sygnałów w pod-próbkowanych przestrzeniach Weyl-Heisenberga, co jest możliwe poprzez ortogonalne rzutowanie sygnału z krytycznie próbkowanej podprzestrzeni Weyl-Heisenberga na pod-próbkowaną podprzestrzeń Weyl-Heisenberga. W teorii Fouriera, formuła sumowania Poissona wiąże periodyzację funkcji z decymacją ekspansji Fouriera. Formuła sumowania Poissona nie może być jednak bezpośrednio zastosowana do ekspansji Weyl-Heisenberga, ponieważ przesunięcia czasu i częstotliwości nie są niezależne w takich ekspansjach. Poprzez zreformułowanie ekspansji Weyl-Heisenberga w języku transformacji Zaka, zależność czasu i częstotliwości jest odpowiednio zmniejszona, na tyle że sumacja Poissona może być użyta w konstrukcji ekspansji Weyl-Heisenberga. Dwa algorytmy tego typu zostały skonstruowane. Pierwszy z nich operuje bezpośrednio na transformacjach Zaka i można go zastosować do obróbki sygnałów. FFT jest głównym obliczeniem wymaganym w tym algorytmie. Drugi algorytm zależy od kon-

wolucyjnej relacji między współczynnikami Weyl-Heisenberga dla systemów krytycznie próbkowanych i współczynnikami Weyl-Heisenberga dla systemów pod-próbkowanych. Ten związek umożliwia wyrażenie sygnału w zależności od iloczynu macierzy współczynników krytycznie próbkowanej i pod-próbkowanej ekspansji Weyl-Heisenberga, pod pewnymi warunkami opisanymi w algorytmie.

Wyniki eksperymentów numerycznych sugerują, że algorytmy do obliczania pod-próbkowanej ekspansji Weyl-Heisenberga mogą być wykorzystane do oszacowania czasów przybycia częściowo znanego sygnału i do „multirate filtering”. Pod-próbkowanie daje dobre przybliżenie oryginalnego sygnału, gdy czas przybycia sygnału (opóźnienie względne do sygnału okna) jest wielokrotnością częstotliwości pod-próbkowania. Rezultat w tym przypadku jest identyczny z efektem decymacji kraty Weyl-Heisenberga. W przypadku, gdy czas przybycia nie jest wielokrotnością częstotliwości pod-próbkowania, algorytm produkuje skalone i przesunięte wersje sygnału pierwotnego. Wynik ten kontrastuje z efektem decymacji kraty Weyl-Heisenberga, który eliminuje wszystkie informacje na temat oryginalnego sygnału, gdy występuje niedopasowanie czas przybycia.

### **Spektralna ekstrapolacja sygnałów z ograniczonym pasmem**

W pracy [1] wspólnie z Tolimieri, rozważyłem problem oszacowania widma częściowo znanego sygnału, i zaproponowałem nową formułę algorytmu Gerchberg-Papoulis dla ekstrapolacji sygnałów z ograniczonym pasmem. Ekstrapolacja Gerchberg-Papoulis jest procesem w którym pewne znane właściwości sygnału, tj., znane wartości danych i znane wsparcie widma, są narzucone na wstępne oszacowanie sygnału iteracyjnie by wyprodukować coraz bardziej dokładne oszacowanie. Jedną z wad tego algorytmu jest stosunkowo mała szybkość zbieżności iteracji, co wpływa na czas obliczeń. Nowe sformułowanie algorytmu zostało uzyskane poprzez zreformułowanie podstawowych operacji algorytmu, truncation i transformacji Fouriera, w języku skończonej transformacji Zaka. Truncation jest zrealizowane w przestrzeni Zaka jako suma kolumn macierzy transformacji Zaka. Transformacja Fouriera jest zrealizowana w przestrzeni Zaka jako rotacja o dziewięćdziesiąt stopni macierzy transformacji Zaka i punktowa multiplikacja elementów macierzy Zaka poprzez „twiddle factor”. Ogólnie rzecz biorąc, zastosowanie transformacji Zaka prowadzi w przybliżeniu do trzykrotnego zmniejszenia liczby operacji mnożenia i dodawania wymaganych przez iteracje algorytmu Gerchberg-Papoulis w przypadku wąsko-pasmowych i niektórych szeroko-pasmowych sygnałów.

Przekształcenie algorytmu Gerchberg-Papoulis z wykorzystaniem transformacji Zaka zakłada sygnały o wartościach zespolonych, podczas gdy procedura jest zwykle stosowana do rzeczywistych sygnałów. W pracy [3] przedstawiłem nowy, bardziej efektywny algorytm, który operuje bezpośrednio na rzeczywistym sygnale, poprzez wyrażonym w języku rzeczywistej transformacji Zaka (RZT) stosunkiem pomiędzy sygnałem i jego transformacją Hartleya, prowadząc w efekcie do około czterokrotnego zmniejszenia złożoności obliczeniowej algorytmu polegającym na standardowej transformacji Zaka.

### Konstrukcja sekwencji wielofazowych

Podczas gdy konstrukcje opisane w [2] i [3] dotyczą dowolnych sygnałów, i konstrukcja opisana w [1] odnosi się do sygnałów z ograniczonym pasmem, ale poza tym arbitralnymi, zalety metod przestrzeni Zaka są najbardziej widoczne w przetwarzaniu specjalnych sygnałów, które mają algebraicznie definiowalne struktury czasowo-częstotliwościowe. Jeden z prominentnych zbiorów takich sygnałów jest zbiór sekwencji wielofazowych. *Sekwencje wielofazowe* są sekwencjami których elementy są zespolone i posiadające normę jednostkową. Szczególnie użyteczny w zastosowaniach jest podzbiór tych sekwencji, taki że elementy każdej sekwencji są  $N$ -tymi pierwiastkami z jedynki, i gdzie każda z sekwencji spełnia pewne specjalne warunki korelacji. Aby określić te warunki, musimy przypomnieć sobie kilka podstawowych faktów z teorii cyfrowego przetwarzania sygnałów.

*Okresowa korelacja krzyżowa* dwóch  $N$ -okresowych sekwencji wielofazowych,  $x$  i  $y$ , jest dana jako

$$z(n) = (y \odot x)_n := \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} y(m)x^*(m-n), \quad 0 \leq n < N, \quad (5)$$

gdzie  $m-n$  jest obliczane modulo  $N$ . Gdy  $y = x$ , okresowa korelacja krzyżowa jest nazywana *okresową auto korelacją*. Sekwencja  $x$  spełnia *warunek idealnej auto korelacji* wtedy i tylko wtedy gdy

$$(x \odot x)_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6)$$

Sekwencje spełniające warunek idealnej auto korelacji są nazywane *idealnymi sekwencjami*. Ponadto, dwie różne idealne sekwencje,  $x$  i  $y$ , spełniają *warunek idealnej korelacji krzyżowej* wtedy i tylko wtedy gdy

$$|(y \odot x)_n| \equiv N^{-1/2}. \quad (7)$$

Termin idealna korelacja krzyżowa odzwierciedla fakt, że największa wartość korelacji krzyżowej sekwencji spełniających warunek idealnej auto korelacji nie może być mniej niż  $N^{-1/2}$ . Wartość ta jest znana jako *granica Sarwata* [28]. Zbiór sekwencji spełniających zarówno warunek idealny auto korelacji oraz warunek idealnej korelacji krzyżowej nazywany jest *zbiorem idealnych sekwencji* (PSS).

W praktyce inżynierskiej najprostrzym i najlepiej znanym przykładem idealnej sekwencji wielofazowej jest liniowy FM chirp [25]. Jego dyskretna wersja jest dana poprzez

$$x(n) = e_{L^2} \left( \frac{an^2}{2} \right) e_L(bn), \quad 0 \leq n < N, \quad (8)$$

gdzie  $a$  jest dyskretnym „chirp rate” i  $b$  jest dyskretnym „carrier frequency”,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $N = KL^2$ ,  $L, KL \in \mathbb{Z}$ . Przedmiotem szczególnego zainteresowania jest okresowy dyskretny chirp, tzn., chirp dla którego

$$x(n+N) = x(n). \quad (9)$$

Zostało pokazane w [5] że warunek (9) jest spełniony wtedy i tylko wtedy gdy

$$aK \in \mathbb{Z} \quad \text{and} \quad \frac{aN^2}{2} + bKL \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Jest to stosunkowo łagodne ograniczenie i jest ono spełnione przez stosunkowo dużą klasę sekwencji wielofazowych.

Liniowy chirp FM i inne idealne sekwencje wielofazowe, gdy zrealizowane jako fale elektromagnetyczne lub akustyczne w układzie radaru lub sonaru, są idealnymi sygnałami ekolokacji, które umożliwiają jednoznaczny pomiar odległości od emitera do nieruchomego obiektu. Szczególne znaczenie ma projektowanie PSSs, które, jak zauważono wcześniej, są specjalnymi zbiorami tych sekwencji. Konstrukcja chirp-like idealnych sekwencji wielofazowych i zbiorów sekwencji, które mogą być zorganizowane jako PSS jest kluczowym zadaniem w wielu aplikacjach przetwarzania sygnałów, w tym multi-wiązki radarowej dla „complex target scene interrogation”, eliminacja zakłóceń w systemie „multi-user”, widma rozproszonego wielokrotnego dostępu komunikacji, i zastosowań z domeny „information-hiding” [22], [23]. Chociaż kilka PSSs zostało zaprojektowanych poprzez ostatnie 50 lat, ogólnego podejście do ich projektowania nie zostało jeszcze sformułowane.

Celem moich badań podjętych w dziedzinie projektowania sekwencji wielofazowych było zidentyfikowanie kompaktowych reprezentacji znanych sekwencji wielofazowych, takich jak sekwencje Zadoff-Chu i Frank, i zaprojektowanie dogodnych ram identyfikacji i klasyfikacji *wszystkich* idealnych sekwencji wielofazowych. Kluczową matematyczną ideą wybranego tu technicznego podejścia jest to, że dzięki „back-projecting” inherentnie wysoko-wymiarowy sygnał na przestrzeni o dopasowanym wymiarze, jest możliwe uzyskanie reprezentacji sygnału, która jest zlokalizowana w tej przestrzeni. Ta lokalizacja znacznie ułatwia obróbkę sygnału, obliczanie, przechowywanie, i eliminacje szumów i zakłóceń. Przesłanką opisaną w pracy było to, że metody przestrzeni Zaka stwarzają szczególnie wygodne ramy dla realizacji tego zadania. Przesłanka ta została w dużej mierze potwierdzona poprzez kilku ważnych wyników które uzyskałem w ciągu ostatniej dekady, jako część monotematycznego cyklu publikacji. Wyniki te obejmują:

- I Wyprowadzenie „closed-form expression” dla DFT liniowego FM chirp [4],
- II Charakteryzacja wsparcia w przestrzeni Zaka liniowego FM chirp i pokrewnych sekwencji wielofazowych [5],
- III Analiza chirps w przestrzeni Zaka i wprowadzenie kilku uogólnień chirps [6], [8],
- IV Projekt w przestrzeni Zaka zbiorów pół-wielofazowych sekwencji Golaya z zerową strefą korelacji [7], [9].

Pierwsze trzy z tych wyników zostały uzyskane podczas mojego pobytu w MITRE. Ostatni wynik został uzyskany niezależnie. Trzeci wynik był tematem patentu USA # 8811535, *Time-frequency space constructions of families of sequences*, przyznany we wrześniu 2014 roku. Wyniki zostały opublikowane w kilku czasopismach IEEE, w rozdziale w monografii Springer, oraz w monografii wydanej przez Springer.

## **I DFT liniowego FM chirp**

DFT liniowego FM chirp ma zasadnicze znaczenie, ponieważ jest ściśle związana z warunkami korelacji

(6-7), i ponieważ umożliwia bezpośrednie oszacowania widma sygnałów. Niemniej, mimo wszechobecności liniowego FM chirp w aplikacjach, dokładna forma DFT liniowego FM chirp do niedawna pozostawała niesprecyzowana. Formuła dyskretnej transformacji Fouriera (DFT) dyskretnego chirp została najpierw opublikowana w [4], a następnie zreformułowana w [8], przy użyciu nieco innego matematycznego języka. Wyprowadzenie wymagało oszacowania uogólnionych kwadratowych sum Gaussa, które są kluczowym pojęciem w algebraicznej teorii liczb [16]. Opisując te rezultaty w skrócie, pokazałem że gdy znormalizowany chirp rate jest co-prime z długością sygnału chirp, czyli  $(\bar{a}, N) = 1$ , wówczas DFT skończonego chirp jest znów skończonym chirp, z magnitudą, rate i carrier frequency odpowiednio skalowaną. W szczególności, gdy znormalizowany chirp rate ma wartość jednostkową, wtedy DFT dyskretnego chirp jest tym samym chirp, różny jedynie zespolonym czynnikiem. Odwrotnie, gdy znormalizowany chirp rate ma wspólny czynnik z długością chirp, to wsparcie DFT dyskretnego chirp jest równe stosunkowi długości chirp i wspólnego czynnika, i położenie DFT zer jest określone przez wartości częstotliwości nośnej i wspólnego czynnika. Między innymi, wyniki te są komplementarne do pewnych rezultatów, otrzymanych przez Jansena, o obliczeniu ciągłych chirps z racjonalnymi chirp rates [24], są one ściśle związane z warunkami przestrzeni Fouriera dla istnienia idealnych i Golay chirps, i dostarczają kontekstu dla komplementarnych warunków przestrzeni Zaka istnienia idealnych i Golay chirps [6]. Inną zaletą dyskretnej formuły DFT jest to, że eliminuje konieczność oszacowania całek Fresnela występujących w ciągłej transformacji Fouriera liniowego FM chirp.

## II FZT liniowego FM chirp i wsparcie liniowego FM chirp w przestrzeni Zaka

Wsparcie FZTs chirps jest o podstawowym znaczeniu w analizie i syntezy wielofazowych sekwencji, ponieważ determinuje ono strukturę i złożoność ich korelacji. W szczególnym przypadku, sprecyzowanym przez *warunek 1 przestrzeni Zaka* (ZSC1), który ogranicza znormalizowany chirp  $\bar{a} = aK$ ,  $\bar{\bar{a}} = aK^2$ , i  $2\bar{b} = 2bK$  poprzez

$$\bar{a}, \bar{\bar{a}}, 2\bar{b} \in \mathbb{Z}, \quad (11)$$

dwa ostatnie parametry obydwie parzyste lub obydwie nieparzyste, FZT dyskretnego chirp jest dany poprzez formułę

$$X_L(j, k) = \begin{cases} Lx_k, & \bar{a}k + j \equiv 0 \pmod{L}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (12)$$

gdzie  $x_k = e_N(\bar{a}k^2/2 + \bar{b}Lk)$ . Wynika stąd, że FZT dyskretnego chirp jest pół-wielofazowa, niezerowa i o stałej wielkości na linii algebraicznej  $\bar{a}k + j \equiv 0 \pmod{L}$ , i zero w przeciwnym przypadku. ZSC1 nie jest najbardziej ogólnym warunkiem kompaktowego wsparcia dyskretnych chirps. W pracy [5], w drugim problemie podjętym w ramach monotematycznego cyklu publikacji, podjąłem szczegółowe badanie FZT dyskretnego chirp, i w rezultacie dwa bardziej ogólne warunki zostały wprowadzone.

Pierwszy z tych warunków, zwany *warunkiem 2 przestrzeni Zaka* (ZSC2), stwierdza, że FZT okresowego



dyskretnego chirp ma minimalne wsparcie równe  $KL$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z} \quad (13)$$

i

$$\frac{\bar{a}L}{2}, \bar{b}L \in \mathbb{Z} \quad \text{or} \quad \frac{\bar{a}L+1}{2}, \bar{b}L + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}. \quad (14)$$

ZSC2 rozszerza zakres zastosowań  $a$  i  $b$  i modyfikuje formułę FZT poprzez bezpośrednie odniesienie do  $b$ , oraz przez przesunięcie algebraicznej linii wsparcia FZT,  $\bar{a}k + j \equiv 0 \pmod{L}$ , w czasie, poprzez  $\frac{\bar{a}L}{2} + \bar{b}L$ .

ZSC2 jest jeszcze bardziej uogólniony przez *warunek 3 przestrzeni Zaka* (ZSC3), poprzez zezwolenie  $\bar{a} = \frac{n}{d} \in \mathbb{Q}$ , gdzie  $n$  i  $d$  są dwiema względnie pierwszymi liczbami całkowitymi, i wymagającymi tylko że

$$nL \text{ is even and } \bar{a}, \bar{b}L \in \mathbb{Z} \quad (15)$$

albo

$$nL \text{ is odd and } \bar{a}, \bar{b}L + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}. \quad (16)$$

To uogólnienie zwiększa wsparcie FZT dyskretnego chirp z  $KL$  do  $dKL$ .

ZSC1, ZSC2 i ZSC3, wraz z formułami dla odpowiednich FZTs, poprzez umożliwienie wykorzystania wysoce zdeterminowanych algebraicznie kompaktowych wsparć FZTs w obliczeniach korelacji w przestrzeniach Zaka, tworzą bazę do projektowania idealnych i Golaya sekwencji opisanych w następujących dwóch sekcjach. Oprócz tych wyników, warunki wsparć w przestrzeniach Zaka są również ważne dla innych kompleksowych konstrukcji radarowych i komunikacyjnych algorytmów przetwarzania sygnałów, które będą przedmiotem przyszłych badań. Kilka przykładów bezpośrednich zastosowań warunków przestrzeni Zaka, które mogą być zastosowane w tych konstrukcjach, w tym w estymacji parametrów chirp, „chirp detection” i „chirp de-noising”, zostały zanalizowane w [5]. Podobnie jak w poprzednim wyniku dla DFT dyskretnego chirp, obliczenia FZT dyskretnego chirp spełniającego ZSC3, najbardziej ogólnego z trzech kompaktowych warunków wsparcia, wymagają obliczeń ogólnych kwadratowych sum Gaussa.

### III Idealne chirps

W [6], w trzecim problemie podjętym w ramach monotematycznego cyklu publikacji, rozważyłem podzbiory skończonych chirps o długości  $N = L^2$ , gdzie  $L$  jest liczbą pierwszą. Wyniki dotyczące minimalnego wsparcia w przestrzeniach Zaka uzyskane w [5] wykorzystano do skonstruowania warunków idealnych korelacji dla chirps w przestrzeniach Zaka, i do udowodnienia twierdzenia, że zbiory chirps spełniających te warunki są zamknięte w odniesieniu do operacji korelacji krzyżowej i transformacji Fouriera. Następnie wykazano, że skończone chirps spełniające idealne warunki korelacji są identyczne z sekwencjami Zadoff-Chu [19], i że niektóre uogólnienia skończonych chirps są identyczne z uogólnionymi lub modulowanymi, sekwencjami Franka [20]. Konstrukcja w przestrzeni Zaka ogólnych sekwencji Zaka została opisana w odniesieniu do właściwości algebraicznych wsparcia dyskretnego chirp w przestrzeni Zaka. Wsparcie to jest dane

poprzez równanie linii algebraicznej  $\bar{a}k + j \equiv 0 \pmod{L}$ , gdzie  $\bar{a}$  jest znormalizowanym dyskretnym „chirp rate” i  $L$  jest parametrem tesselacji kraty transformacji Zaka. Opis ten prowadzi do głównego wyniku tej pracy, konstrukcji „partition” zbioru wszystkich (up to a modulation factor) sekwencji wielofazowych z idealnymi właściwościami auto korelacji. Partition zawiera  $(L - 2)!$  PSSs, w tym zbiór uogólnionych sekwencji Frank oraz zbiór zbiorów niektórych permutacji uogólnionych sekwencji Franka. Partition jest dana poprzez „right coset decomposition” grupy wszystkich permutacji w odniesieniu do pewnej grupy cyklicznej. Konstrukcja ta sugeruje kilka dalszych uogólnień, które mogą być uzyskane poprzez operowanie wyłącznie na podgrupach grupy permutacji.

Choć spokrewnione rodziny idealnych sekwencji wielofazowych o różnym stopniu ogólności zostały przedstawione wcześniej, w tym rodziny zaproponowane przez Chu [19], Franka i Zadoff [20], [27] Popovic i Suehiro i Hatori [29], wyniki przedstawione w [6] zostały uzyskane niezależnie od tych rezultatów, za pomocą innego podejścia, i są one bardziej ogólne w kilku ważnych aspektach. Po pierwsze wykazano, że dla  $N = L^2$ ,  $L$  będącą nieparzystą liczbą pierwszą, wszystkie z wyżej wymienionych rodzin są szczególnymi przypadkami tej samej konstrukcji (wynik ten został następnie uogólniony do  $N = KL^2$  w [8] przez mnie i współautorów). Po drugie, wykazano, że wszystkie zbiory idealnych sekwencji wielofazowych typu sekwencji Frank można otrzymać poprzez partition zbioru wszystkich sekwencji z idealną auto korelacją. Na koniec wykazano, że zastosowanie podejścia przestrzeni Zaka prowadzi do zastąpienia analizy sekwencji o wartościach całkowitych analizą zbiorów permutacji. Wynik ten oddziela operacje permutacji i modulacji, które wraz z kompaktowym wsparciem FZTs idealnych sekwencji wprowadza do analizy pewien stopień swobody, który może być zastosowany na przykład w konstrukcji większych, sub-optimalnych zbiorów sekwencji (operujących wyłącznie na sekwencjach permutacji), będącymi odpowiednimi „unions” kilku oddzielnych zbiorów idealnych sekwencji, lub w projektowaniu zbiorów idealnych sekwencji o specjalnych właściwościach (operujących wyłącznie na sekwencjach modulacji). Wstępne badania wykazały, że różne modulacje produkują sekwencje z różnymi nieokresowymi właściwościami korelacyjnymi. Monografia której współautorami są An i Tolimieri [8] rozszerzyła pracę opisaną w [6] w kilku kierunkach. Jednym z głównych wyników monografii, który jest moim wkładem, został oparty na wyprowadzeniu wzoru FZT dla „zero-padded” chirps, który umożliwia uogólnienie analizy korelacji w przestrzeni Zaka z okresowych chirps do nieokresowych chirps. Trzy przypadki FZT zero-padded chirps zostały rozważone: rozszerzenie kraty Zaka w wymiarze czasowym, rozszerzenie kraty Zaka w wymiarze częstotliwości, i przypadek mieszany. Innym uogólnieniem diskutowanym było usunięcie ograniczenia kraty Zaka do kwadratu, umożliwiając w ten sposób konstrukcję sekwencji o długości, która nie posiada czynnika kwadratowego, i pewne specjalne konstrukcje, w których analiza albo w wymiarze czasu albo w wymiarze częstotliwości jest bardziej istotna.

#### IV Golay chirps

Zbiory idealnych sekwencji rozważane w poprzedniej sekcji mają idealną auto korelację i minimalną stałą korelację krzyżową. Alternatywne zbiory sekwencji mające zastosowania to: (1) zbiory sekwencji gdzie zarówno auto jak i korelacja krzyżowa przyjmuje wartość zero dla opóźnień zawartych w przedziale nazy-

wanym *zerową strefą korelacji* (ZCZ) [21], oraz (2) zbiór sekwencji Golay lub sekwencji komplementarnych, gdzie indywidualne auto korelacje sumują się do idealnej auto korelacji [21], [26]. Sekwencje w (2) są nazywane sekwencjami ZCZ. Zarówno sekwencje ZCZ jak i sekwencje Golay wymieniają idealną auto korelację idealnych sekwencji na większą elastyczność w doborze parametrów sekwencji, przede wszystkim poprzez umożliwienie pół-wielofazowej sekwencji spektrum, przy jednoczesnym zaspokojeniu ograniczonej wersji warunku idealnej auto korelacji.

W czwartym problemie podjętym w ramach monotematycznego cyklu publikacji, wprowadziłem dwie nowe konstrukcje zbiorów sekwencji w przestrzeni Zaka, które są jednocześnie Golay i ZCZ.

W pracy [7] przedstawiłem specjalną konstrukcję, zwaną konstrukcją A, i otrzymaną w wyniku analizy sekwencji wielofazowych na  $M^2 \times M$  kracie transformacji Zaka. Ta konstrukcja prowadzi do zbioru sekwencji o zmiennej długości ZCZ auto korelacji, i zerowej korelacji krzyżowej. Konstrukcja zawiera zbiory sekwencji z  $(M - 1)$ -punktową,  $(T_2 M - 1)$ -punktową i  $(M^2 - 1)$ -punktową zerową strefą auto korelacji, gdzie  $T_2$  jest dowolnym nietrywialnym czynnikiem  $M$ . Centralną cechą konstrukcji A jest szczególna forma skończonej transformacji Zaka sekwencji ZCZ: stała i niezerowej wielkości w  $M$  punktach, dokładnie w jednym punkcie w każdym z wcześniej wybranych  $M$  rzędów skończonej transformacji Zaka, i zero w pozostałych miejscach, w  $M^3 - M$  punktach. Kompaktowe i wysoce uporządkowane wsparcie skończonej transformacji Zaka ma zasadnicze znaczenie, gdyż w związku z dwuwymiarowym charakterem przestrzeni Zaka korelacji krzyżowej, wsparcie indywidualnych sekwencji w zbiorze sekwencji ZCZ można zidentyfikować z rozłącznymi podzbiórami rzędów transformacji Zaka sumy wszystkich sekwencji w zbiorze [4], [5]. Korespondencja ta nadaje konstrukcji A kilka innych kluczowych właściwości. Obejmują one: okresowa komplementarność, zerowa korelacja krzyżowa, pół-wielofazowa  $M^2$ -okresowa transformacja Fouriera ze stałą niezerową wielkością w  $M^2$  punktach i zerową wielkością w  $(M - 1)M^2$  punktach, i wysoce uporządkowana auto korelacja. Selekcyjne kompaktowe wsparcie dyskretnej transformacji Fouriera jest szczególnie przydatne w kognitywnym radarze i zarządzaniu widmem. Kompaktowe wsparcie transformacji Zaka ułatwia przechowywanie sekwencji oraz obliczanie korelacji, zmniejszając tą pierwszą o współczynnik  $M^2$  (od  $M^3$  do  $M$ ) i drugą w przybliżeniu czterokrotnie. Konstrukcja A w sposób naturalny prowadzi do bardziej ogólnej konstrukcji, mającej zastosowanie do rozmiarów kraty transformacji Zaka  $KM^2 \times M$ ,  $K \in \mathbb{P}$ . To uogólnienie zapewnia dodatkową elastyczność w selekcji liczby sekwencji w zbiorze i względnej wielkości strefy zerowej auto korelacji.

W pracy [9], opisałem inny szczególny przypadek sekwencji Golaya, zwany konstrukcją B. Tak jak konstrukcja A, ta nowa konstrukcja jest otrzymana w przestrzeni Zaka, i tak jak konstrukcja A, ta nowa konstrukcja ma właściwości ZCZ, zerowej korelacji krzyżowej, i wysoce kompaktowych pół-wielofazowych FZT i DFT. W przeciwieństwie do konstrukcji A, poszczególne sekwencje konstrukcji B są dane poprzez FZTs dyskretnych chirps których wsparcia są ograniczone do pojedynczych rzędów, i których wsparcia DFT są grzebieniami. Ta specjalna struktura wsparć FZT i DFT jest osiągnięta poprzez odpowiednie

specjalizowanie warunku wsparcia w przestrzeni Zaka, głównie poprzez ograniczenie chirp rate  $a$  do całkowitych wielokrotności  $L^2/M$ . W porównaniu z konstrukcją A, konstrukcja B oferuje szerszy wybór wymiarów kraty FZT, osiąga górną granicę dla iloczynu  $|ZCZ|$  i wielkości zbioru sekwencji, i zmniejsza złożoność obliczeniową korelacji krzyżowej w przybliżeniu o czynnik  $\frac{\log_2 N}{3}$ , w porównaniu z konstrukcją A, i o czynnik  $\frac{2\log_2 N+1}{2+M/L}$ , w porównaniu z bezpośrednią realizacją w przestrzeni Fouriera. Korzyści te są uzyskane kosztem zmniejszonej parametryzacji zbioru sekwencji Golaya i większego rozmiaru alfabetu. Konstrukcje A i B to dwie główne konstrukcje Golay chirps w przestrzeni Zaka dla non-prime  $N$ . Kompaktowe wsparcie DFTs i FZTs w obu konstrukcjach, oprócz ułatwienia projektowania i zredukowania obliczeń, zezwala na zaprojektowania pasma sekwencji Golay, który jest najbardziej odpowiedni dla danej aplikacji.

### Podsumowanie głównych prac

Głównym celem prac tu opisanych było zbadanie i wykazanie przydatności metod przestrzeni Zaka w cyfrowym przetwarzaniu sygnałów. Trzy zastosowania zostały rozważone:

1. Obliczanie pod-próbkowanych sygnałów w przestrzeni Zaka
2. Ekstrapolacja sygnałów z ograniczonym pasmem w przestrzeni Zaka, i
3. Konstrukcja wielofazowych sekwencji posiadających korelacje o specjalnych właściwościach.

Pierwsze dwa zastosowania zostały opisane w [1], [2-3], odpowiednio. W pierwszej pracy dokładna relacja jest sprecyzowana pomiędzy krytycznie próbkowaną i integer pod-próbkowaną ekspansją Weyl-Heisenberga, i dwa algorytmy do obliczania integer pod-próbkowanej ekspansji Weyl-Heisenberga są skonstruowane. W drugiej pracy popularna procedura ekstrapolacji sygnałów z ograniczonym pasmem, oparta na pracy Gerchberg i Papoulis, jest rozważona w przestrzeni Zaka, przyczyniając się do trzykrotnej redukcji złożoności obliczeniowej oryginalnego algorytmu.

O ile pierwsze dwa zastosowania są ważne, główny akcent tej pracy był na trzecim problemie. Praca ta została opisana w publikacjach [3-7], w monografii [8] (głównie oryginalny wkład, z częściowym „overlap” z publikacją [6]), w rozdziale w monografii [9] (original, peer-reviewed contribution), oraz w artykułach konferencyjnych [11-14]. Główne wyniki tych prac to:

1. Wyprowadzenie formuł zamkniętych dla DFT dyskretnego FM chirp [4]. Formuły te polegają na nietrywialnych oszacowaniach kwadratowych sum Gaussa i stanowią podstawę wszystkich zadań cyfrowego przetwarzania sygnałów dyskretnych chirps i spokrewnionych sygnały wielofazowych, zwłaszcza w zastosowaniach radarowych i sonarowych.

2. Wyprowadzenie formuł zamkniętych dla FZT dyskretnego FM chirp [5] oraz warunków kompaktowego wsparcia FZTs dyskretnego FM chirp. Podobnie jak w 1., te wzory opierają się na nietrywialnych oszacowaniach kwadratowych sum Gaussa, i mają zasadnicze znaczenie dla analizy sekwencji wielofazowych o specjalnych właściwościach korelacji w przestrzeni Zaka.

3. Konstrukcja idealnych wielofazowych sekwencji [6], [8]. Warunki kompaktowego wsparcia dla FZTs dyskretnych chirps sformułowane w 2. stanowią bazę do weryfikacji właściwości korelacji chirps. Warunki te zostały zastosowane do wyprowadzenia sekwencji Zadoff-Chu i Frank w przestrzeni Zaka i do ustanowienia ram do projektowania nowych idealnych sekwencji wielofazowych poprzez permutacje i modulacje niezerowych elementów FZT.

4. Konstrukcja wielofazowych sekwencji Golaya [7], [9]. Dwie nowe konstrukcje sekwencji wielofazowych Golaya zostały opisane, A i B, obydwie ściśle związane z konstrukcją zbiorów idealnych sekwencji. Obie konstrukcje, oprócz posiadania właściwości Golaya, mają właściwość zerowej strefy auto korelacji, zerowej korelacji krzyżowej, i wysoce kompaktowej pół-wielofazowej DFT i FZT. Konstrukcja B jest bardziej wyspecjalizowana niż konstrukcja A, ale oferuje większy wybór rozmiarów, osiąga górną granicę dla produktu  $|ZCZ|$  i rozmiaru zbioru sekwencji, i jest obliczeniowo bardziej efektywna.

Łącznie wyniki te demonstrują że przestrzeń Zaka stwarza naturalne ramy do analizy i syntezy wielofazowych i pół-wielofazowych sekwencji z idealnych lub dobrymi (tj Golaya) właściwościami korelacji. Ponadto, przeniesienie analizy do przestrzeni Zaka ujawnia ścisły związek między różnymi konstrukcjami, co ułatwia zidentyfikowanie optymalnego kompromisu między różnymi parametrami konstrukcyjnymi dla danego zastosowania.

### Moje kontrybucje

Pierwsze dwa zastosowania były pracami wspólnymi. W pierwszym z nich opracowałem wspólnie z Joseph i Tolimieri teoretyczne ramy do wyrażenia ekspansji Weyl-Heisenberga w kategoriach ortogonalnych projekcji, i opracował teoretyczny formalizm do wykorzystania pod-próbkowanej ekspansji Weyl-Heisenberg do detekcji sygnałów [1]. Moj wkład stanowi 33 %. W drugim zastosowaniu rozszerzyłem ideę Tolimierego o ekstrapolacji sygnałów z ograniczonym pasmem w przestrzeni Zaka od sygnałów z pół-zerowym pasmem do sygnałów z dowolnym pasmem [2]. Moj wkład stanowi 50 %. W dalszej pracy rozszerzyłem formalizm od sygnałów kompleksowych do sygnałów rzeczywistych (publikacja [3]).

W głównej pracy opisywanej w referacie, konstrukcji sekwencji wielofazowych, wyniki 1, 2 i 3 zostały opisane w artykułach jedno-autorskich ([4-5], [7], [9] oraz [13-14]), i mój wkład w tę pracę stanowi 100 %. Wynik 3 został opisany w [6] i [8], które były wspólnymi pracami z Tolimieri, i An i Tolimieri, odpowiednio. Główny zestaw wyników w 3 zostały oryginalnie zaprezentowany w [6] (opublikowany po publikacji [8] z powodu dłuższego procesu recenzji, ale napisany wcześniej). Moim wkładem w pracę [6] (50 %) było sformułowanie warunków korelacji krzyżowej w przestrzeni Zaka dla idealnych chirps i specyfikacja dalszych uogólnień, opartych na rozdzieleniu w przestrzeni Zaka operacji modulacji i permutacji. W pracy [8] (Wkład 25 %) wyniki te zostały rozszerzone w kilku kierunkach. Jednym z głównych rozszerzeń, które zaproponowałem, było rozszerzenie formalizmu analizy w przestrzeni Zaka od okresowych chirps do zero-padded chirps, w oparciu o moje wyprowadzenie odpowiednich wyrażeń na FZTs dla zero-padded chirps.

#### **4. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych**

Po otrzymaniu doktoratu, pracowałem w Air Force Research Laboratory w Bedford, MA, nad podstawami matematycznymi rekonstrukcji hyperspektralnych obrazów. Hyperspectralne obrazy były wygenerowane poprzez kamerę operującą w paśmie podczerwonym na zasadzie tomografii komputerowej. Celem projektu było odtworzenie informacji brakującego stożka. Wyniki tych badań zostały opublikowane w dwóch artykułach w czasopiśmie Journal of Optical Society of America A.

Oprócz prac nad sekwencjami wielofazowymi i obrazowaniu wielospektralnym prowadziłem w trakcie ostatnich dziesięciu lat dwa główne projekty badawcze: projektowanie algorytmów do dopasowania sekwencji DNA i do wykrywania patterns, i badanie struktury matematycznej akumulacji dowodów w systemie Dempster-Shafer dla fuzji informacji multimodalnej.

Rezultatem pierwszej pracy było opracowanie nowego algorytmu opartego na DFT dla obliczeń dopasowywania sekwencji DNA, który był bardziej efektywny niż metody state-of-the-art, i nowe podejście do wykrywania powtórzeń tandemowych DNA i indeli. Algorytmy te były następnie zastosowane do identyfikacji nowych indeli oraz polimorfizmów w genomie *Bacillus anthracis*. Wyniki tego badania zostały opublikowane w kilku czasopismach IEEE, w Bioinformatyce, i w BMC Research Notes. Algorytm dopasowania sekwencji DNA był przedmiotem patentu Stanów Zjednoczonych # 8239140 *System, method and computer product for DNA sequence alignment using symmetric phase only matched filters*, przyznany w roku 2012, i artykułu IEEE, który otrzymał doroczną nagrodę Ron Fonte dla najlepszego artykułu.

Wynikiem drugiej pracy było odkrycie specjalnej relacji algebraicznej pomiędzy systemami Dempster-Shafer i Bayesa do syntezy informacji. Odkrycie to rozwiązało prawie pięćdziesięcioletni problem, wynikający z niejednoznacznej interpretacji reguły akumulacji informacji Dempster-Shafer, i utrudniający porównywanie wyników syntezy informacji według tych dwóch schematów. Wyniki tej pracy zostały opublikowane w IEEE Transactions on Information Theory w 2009.

Ostatnio byłem zaangażowany w prace badawcze nad analizą statystyczną sakadycznych ruchów gałek ocznych w Active Perception Laboratory at Boston University in Boston. Niezależnie, kontynuuje prace nad podstawami matematycznymi projektowania sekwencji wielofazowych.

## Bibliografia

- [15] M. An, A. K. Brodzik, I. Gertner and R. Tolimieri, *Weyl-Heisenberg Systems and the Finite Zak Transform*, in Signal and Image Representation in Combined Spaces, Y. Zeevi and R. Coifman (Eds), Academic Press, 1997, pp 3-21.
- [16] B.C. Berndt, R.J. Evans and K.S. Williams, Gauss and Jacobi sums, Wiley-Interscience, New York, 1998.
- [17] A. K. Brodzik, "Construction of sparse representations of perfect polyphase sequences in Zak space with applications to radar and communications", *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, Special Issue on Recent Advances in Non-stationary Signal Processing, January 2011.
- [18] A. K. Brodzik and R. Tolimieri, *The Computation of Weyl-Heisenberg Coefficients for Critically Sampled and Oversampled Signals*, IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis, Philadelphia, 1994, pp 272-275.
- [19] D.C. Chu, "Polyphase codes with good periodic correlation properties", *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 18, No. 34, pp 531-532, July 1972.
- [20] R.L. Frank and S.A. Zadoff, "Phase shift pulse codes with good periodic correlation properties", *IRE Trans. Inform. Theory*, Vol. IT-8, pp 381-382, 1962.
- [21] M. Golay, "Complementary series", *IEEE Trans. on Info. Theory*, **7**(2), 82-7, (1961).
- [22] S.W. Golomb and G. Gong, Signal design for good correlation, Cambridge University Press, 2005.
- [23] T. Hellesteth and P.V. Kumar, *Sequences with low correlation*, in Handbook of coding theory. V.S. Pless and W.C. Huffman, Eds, 1765-1854, Elsevier, (1998).
- [24] A.J.E.M. Janssen, "The Zak Transform: A signal transform for sampled time-continuous signals", *Philips J. Res.*, Vol. 43, pp 23-69, 1988.
- [25] J.R. Klauder, A.C. Price, S. Darlington and W.J. Albersheim, "The theory and design of chirp radars", *Bell System Tech. J.*, Vol. 39, pp 745-808, 1960.
- [26] M.G. Parker, K.G. Paterson and C. Tellambura, *Golay complementary sequences*, Wiley Encyclopedia of Telecommunications, (2004).
- [27] B.M. Popovic, "Generalized chirp-like polyphase sequences with optimum correlation properties", *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. 38, No. 4, pp 1406-1409, July 1992.
- [28] D.V. Sarwate, "Bound on crosscorrelation and autocorrelation of sequences", *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. 25, No. 6, pp 720-724, November 1979.
- [29] N. Suehiro and M. Hatori, "Modulatable orthogonal sequences and their application to SSMA systems", *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. 34, No. 1, pp 93-100, January 1988.

- [30] R. Tolimieri and S. Winograd, "Computing the ambiguity surface", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. ASSP-33, No. 4, pp 1239-1245, October 1985.
- [31] H. Torii, M. Nakamura and N. Suehiro, "A new class of zero-correlation zone sequences", *IEEE Trans. on IT*, Vol. 50, No. 3, pp 559-565, March 2004.
- [32] J. Zak, "Finite translations in solid state physics", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 19, pp 1385-1397, 1967.