

Autoreferat

dr inż. Piotr Borowiecki

*Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki
Politechnika Gdańska*

Spis treści

I Imię i nazwisko	1
II Posiadane dyplomy i stopnie naukowe	1
III Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych	1
IV Wskazanie osiągnięcia	1
A) Tytuł osiągnięcia naukowego	1
B) Lista monotematycznych artykułów składających się na osiągnięcie	1
C) Omówienie celu naukowego i osiągniętych wyników	1
1. Wprowadzenie	2
2. Omówienie motywacji i celu badań	3
2.1. Podziały grafów w projektowaniu klas grafów i algorytmów przybliżonych	3
2.2. Funkcje potencjału w analizie efektywności algorytmów	4
2.3. Dynamiczne podziały grafów	5
3. Omówienie osiągniętych wyników	7
3.1. Podziały grafów w projektowaniu klas grafów i algorytmów przybliżonych	7
3.2. Funkcje potencjału w analizie efektywności algorytmów	11
3.3. Dynamiczne podziały grafów	15
4. Podsumowanie	17
Bibliografia	18
V Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych	21
A) Lista artykułów zawierających pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze	21
B) Omówienie wyników zawartych w artykułach wymienionych w punkcie A)	22
1. Wprowadzenie	23
2. Zbiory niezależne w hipergrafach	23
3. Kolorowanie właściwe z ograniczeniami dla kolorów na ścieżkach	24
4. Wybrane własności grafów jako instancji problemów optymalizacyjnych	27
5. Algorytmy agentowe przeszukiwania, inspekcji i ewakuacji w grafach	29
6. Badania przed doktoratem – uwzględnione w rozprawie doktorskiej	33
7. Badania przed doktoratem – nieuwzględnione w rozprawie doktorskiej	34

I IMIĘ I NAZWISKO: **Piotr Borowiecki**

II POSIADANE DYPLOMY I STOPNIE NAUKOWE:

- A) Doktor nauk technicznych w zakresie informatyki (z wyróżnieniem).
Politechnika Gdańska, Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki.
Tytuł rozprawy: “Algorytmy kolorowania grafów w trybie online”.
Data obrony: 21 listopada 2000.
- B) Magister inżynier (z wyróżnieniem).
Wyższa Szkoła Inżynierska w Zielonej Górze, Wydział Elektryczny.
Data obrony: 13 lipca 1989.

III INFORMACJE O DOTYCHCZASOWYM ZATRUDNIENIU W JEDNOSTKACH NAUKOWYCH:

- 2009–obecnie: Adiunkt na Wydziale Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki,
Politechniki Gdańskiej.
- 2001–2008: Adiunkt na Wydziale Matematyki, Informatyki i Ekonometrii,
Uniwersytetu Zielonogórskiego¹.
- 1989–2000: Asystent na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki,
Politechniki Zielonogórskiej².

IV WSKAZANIE OSIĄGNIĘCIA WYNIKAJĄCEGO Z ART. 16 UST. 2 USTAWY Z DNIA 14 MARCA 2003 R. O STOPNIACH NAUKOWYCH I TYTULE NAUKOWYM ORAZ O STOPNIACH I TYTULE W ZAKRESIE SZTUKI (Dz. U. 2016 R. POZ. 882 ZE ZM. W Dz. U. z 2016 R. POZ. 1311.):

A) Tytuł osiągnięcia naukowego:

Algorytmy zachłanne w problemach podziałów i niezależności na grafach

B) Osiągnięciem stanowiącym przedmiot niniejszego wniosku jest następujący monotematyczny cykl artykułów:

- [A1] P. Borowiecki, *Computational aspects of greedy partitioning of graphs*, Journal of Combinatorial Optimization 35(2) (2018), 641–665.
- [A2] P. Borowiecki, D. Rautenbach, *New potential functions for greedy independence and coloring*, Discrete Applied Mathematics 182 (2015), 61–72.
- [A3] P. Borowiecki, F. Göring, J. Harant, D. Rautenbach, *The potential of greed for independence*, Journal of Graph Theory 71(3) (2012), 245–259.
- [A4] P. Borowiecki, F. Göring, *GreedyMAX-type algorithms for the maximum independent set problem*, Proc. 37th Conf. on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science (SOFSEM 2011), Lecture Notes in Computer Science 6543 (2011), 146–156.
- [A5] P. Borowiecki, E. Sidorowicz, *Dynamic coloring of graphs*³, Fundamenta Informaticae 114(2) (2012), 105–128.
- [A6] P. Borowiecki, E. Sidorowicz, *Dynamic F-free coloring of graphs*. Graphs and Combinatorics (2018) – w druku, DOI:10.1007/s00373-018-1886-8.

C) Omówienie celu naukowego wyżej wymienionych artykułów i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

¹Uniwersytet Zielonogórski powstał w 2001 r. przez połączenie Politechniki Zielonogórskiej z Wyższą Szkołą Pedagogiczną w Zielonej Górze.

²Politechnikę Zielonogórską utworzono w 1996 r. zmieniając nazwę Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Zielonej Górze.

³z wyłączeniem stron 124–126.

1. Wprowadzenie

Osiągnięcie naukowe będące przedmiotem niniejszego opracowania stanowi monotematyczny cykl sześciu artykułów [A1]–[A6] zatytułowany “*Algorytmy zachłanne w problemach podziałów i niezależności na grafach*”. Wyniki badań prezentowane w pracach powyższego cyklu można ująć w trzech wątkach tematycznych, które dotyczą:

- zastosowania podziałów grafów w projektowaniu klas grafów i algorytmów przybliżonych,
- funkcji potencjału w analizie efektywności algorytmów,
- dynamicznych podziałów grafów.

Przeprowadzone przez nas badania, koncepcyjnie silnie nawiązują do dwóch klasycznych paradygmatów algorytmicznych jakimi są: zasada zachłanności (ang. *greediness rule*) oraz zasada dziel i zwyciężaj (ang. *divide and conquer rule*). Zasady te, choć dobrze znane i często używane w praktyce, posiadają niezmiennie wysoki potencjał aplikacyjny w kontekście współczesnych problemów informatyki i jej zastosowań technicznych.

Podział grafu na części jest często pierwszym etapem realizacji bardziej złożonego zadania, np. związanego ze zrównolegleniem obliczeń, a także redukcją ich złożoności oraz kosztu. Może być to również jeden z podstawowych kroków pewnego ogólnego algorytmu stosującego zasadę dziel i zwyciężaj. O znaczeniu podziałów grafów mogą świadczyć poświęcone im liczne pozycje literatury oraz udokumentowane różnorodne zastosowania. Obszernym omówieniem problematyki podziałów, uwzględniającym fakt, że są nimi również klasyczne pokolorowania grafów, są, przykładowo, książki pod redakcją Badera i in. [4] oraz Kubale [51]. W książkach tych znajdujemy również wielokrotnie odwołania do algorytmów zachłannych, które znana są nie tylko ze swojej dużej przejrzystości, ale przede wszystkim, z bardzo dobrej potwierdzonej w praktyce efektywności.

Niesłabnącą popularnością cieszą się algorytmy, które dokładnie albo w przybliżony sposób, rozwiązują rozliczne problemy optymalizacyjne na grafach należących do określonych klas. Jak wynika z przeprowadzonych badań, własności tworzonych zachłannie podziałów grafów, można skutecznie zastosować do opisu uniwersalnej techniki projektowania nowych klas grafów wraz z działającymi na nich nowymi algorytmami przybliżonymi. Istotną zaletą opracowanej przez nas metody jest możliwość bezpośredniego wykorzystania potencjału dostępnego dzięki znajomości setek klas grafów i działających na nich algorytmów (patrz, np. Brandstädt i in. [16]).

Grafy posiadają wiele udokumentowanych zastosowań w modelowaniu złożonych sieci występujących w różnych obszarach nauki i techniki, począwszy od telekomunikacji poprzez systemy produkcyjne po chemię i sieci społecznościowe. Naturalną cechą wielu rzeczywistych systemów jest ich dynamika. Na przykład, do sieci społecznościowych dołączają nowe osoby tworząc grupy (klastry), połączenia w sieciach telekomunikacyjnych dynamicznie ewoluują, zgodnie z określonym wcześniej wzorcem (np. podczas komunikacji z satelitami krążącymi po ustalonych trajektoriach), albo w mniej przewidywalny sposób (np. podczas komunikacji w mobilnych sieciach ad-hoc). Wspólną cechą we wszystkich tych obszarach zastosowań jest to, że zarówno struktura jak i inne cechy grafu modelującego rzeczywisty system, podlegają dynamicznym zmianom w czasie. W kontekście tym rozważamy problem dynamicznych podziałów grafów, którego potencjalne zastosowania w sieciach WDM oraz szeregowaniu zadań wieloprocesorowych na procesorach dedykowanych analizowaliśmy wcześniej dla trybu online (patrz Borowiecki [15]). Wyniki badań zawarte w pracach omawianego tu cyklu monotematycznego poszerzają zakres zastosowań zwiększając możliwości modelowania dynamiki systemów.

Podstawowym celem tego autoreferatu jest przedstawienie motywacji oraz głównych wyników przeprowadzonych badań, podkreślenie powiązań pomiędzy poszczególnymi pracami cyklu oraz wskazanie nowych obszarów zastosowań klasycznych i nowych pojęć.

2. Omówienie motywacji i celu badań

2.1. Podziały grafów w projektowaniu klas grafów i algorytmów przybliżonych

Podziały grafów rozważane w pracach [A1], [A2], [A5] i [A6] polegają na podzieleniu zbioru wierzchołków grafu w taki sposób, aby zbiory otrzymane w wyniku podziału indukowały grafy należące do pewnej ustalonej addytywnej dziedzicznej klasy grafów \mathcal{P} , przy czym klasę grafów nazywamy *dziedziczną*, gdy z faktu, że graf G należy do klasy \mathcal{P} wynika, że należą do niej również wszystkie jego podgrafy indukowane, natomiast o klasie \mathcal{P} mówimy, że jest *addytywna*, gdy z przynależności każdej spójnej składowej grafu G do tej klasy wynika, że należy do niej również graf G (prowadząc nasze badania często korzystaliśmy z faktu, że każdą klasę dziedziczną można opisać podając dla niej zbiór minimalnych grafów zabronionych oraz, że klasa dziedziczna jest addytywna wyłącznie wtedy, gdy opisujące ją minimalne grafy zabronione są spójne).

Jako kryterium optymalizacyjne, w rozważanym przez nas problemie, przyjmujemy minimalizację liczby zbiorów otrzymywanych w wyniku podziału. Poszczególnym zbiorom podziału często przypisywane są kolejne liczby naturalne nazywane *kolorami* a wspomniany powyżej problem podziału znany jest również jako problem *\mathcal{P} -kolorowania*.

Jednym z najbardziej znanych wariantów powyższego problemu jest podział na jak najmniejszą liczbę *zbiorów niezależnych*, czyli zbiorów indukujących grafy K_2 -wolne (grafy bezkrawędziowe). Wariant ten znany jest jako *kolorowanie właściwe*. Wśród pozostałych wariantów, w literaturze wiele uwagi poświęcono, np. podziałom na grafy P_3 -wolne (ang. *subcoloring*), podziałom na grafy P_4 -wolne, a także podziałom na grafy o stopniu ograniczonym przez ustaloną stałą d , czyli kolorowaniu d -niewłaściwemu (ang. *d-improper coloring*). Różne warianty problemu nie zawsze są niezależne, np. podział na grafy o stopniu mniejszym od 1 równoważny jest z kolorowaniem właściwym. Choć poszczególne warianty problemu występują pod wieloma różnymi nazwami, często określane są wspólnym mianem problemów *uogólnionego kolorowania grafów*.

Niemal dla wszystkich rozpatrywanych do tej pory wariantów kolorowania uogólnionego można odnaleźć w literaturze wyniki świadczące o ich trudności obliczeniowej, czego szczególnym wyrazem jest niemal całkowity brak charakterystyki klas grafów k -kolorowalnych.

W celu dokładniejszego przedstawienia naszej motywacji do prowadzenia badań nad kolorowaniem uogólnionym rozważmy grafowy problem minimalizacyjny Π , o którym wiemy, że jest obliczeniowo trudny w pewnej klasie grafów \mathcal{Q} . Często stosowanym schematem jest wówczas prowadzenie badań zmierzających do wyznaczenia jak najszerszej klasy grafów \mathcal{P} , dla której można podać wielomianowy algorytm dokładny (w tym przypadku, \mathcal{P} nie może zawierać \mathcal{Q}) albo wielomianowy algorytm przybliżony dla problemu Π (w tym przypadku, wskazane jest aby \mathcal{P} zawierała \mathcal{Q}). Wzmocnieniem wyników o takim charakterze może być następnie podanie algorytmu o mniejszej złożoności obliczeniowej lub lepszej efektywności dla pewnej klasy \mathcal{P}' takiej, że $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ (częstą konsekwencją jest konieczność zawężenia klasy grafów dopuszczalnych na wejściu nowego algorytmu, tzn. przyjęcie $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$). Alternatywnym schematem badawczym jest wzmocnienie wyniku przez wyznaczenie klasy \mathcal{P}' stanowiącej *rozszerzenie klasy \mathcal{P}* , czyli takiej, że $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, przy *jak najmniejszym pogorszeniu efektywności* względem osiągniętej na klasie \mathcal{P} przed jej rozszerzeniem.

Jednym z głównych celów naszych badań nad kolorowaniem uogólnionym była realizacja powyższej idei przez *opracowanie podstaw uniwersalnej metody projektowania rozszerzeń klas grafów wraz z działającymi na nich nowymi wielomianowymi algorytmami przybliżonymi*, przy czym przez zaprojektowanie klasy rozumiemy wyznaczenie charakteryzującego ją zbioru minimalnych grafów zabronionych. Możliwość urzeczywistnienia tej idei pojawia się m.in. dzięki opisanym w pracy [A1] własnościom strukturalnym grafów, które udaje się zaobserwować, gdy na ich strukturę spojrzymy przez pryzmat podziałów tworzonych przez *algorytm zachłanny*.

Kluczową cechą ujęcia zaproponowanego w pracy [A1] jest możliwość wykorzystania całej palety już istniejących wielomianowych algorytmów przybliżonych, które działają na określonych addytywnych dziedzicznych klasach grafów – takie klasy i algorytmy określamy mianem *klas i algorytmów bazowych*. W rozważaniach naszych przyjmujemy, że rozstrzygnięcie czy dany graf G należy do klasy bazowej można otrzymać w czasie wielomianowym oraz, że rozwiązania problemu Π posiadają tzw. *własność składania* (założenia te omawiamy dokładniej w punkcie 3.1). Istotę zaproponowanej przez nas metody projektowania można przedstawić następująco:

Jeżeli Π jest problemem minimalizacyjnym o rozwiązaniach posiadających własność składania, to każdy algorytm bazowy działający na klasie bazowej \mathcal{P} , można zastosować do zdefiniowania nowego wielomianowego algorytmu przybliżonego dla problemu Π a klasę bazową \mathcal{P} do zaprojektowania jej rozszerzenia \mathcal{P}' takiego, że współczynnik aproksymacji nowego algorytmu na klasie \mathcal{P}' będzie tego samego rzędu co współczynnik algorytmu bazowego na klasie bazowej \mathcal{P} .

Jednym z celów powstania pracy [A1] było przedstawienie podstaw powyższej metody. Wymagało to między innymi opisanie własności strukturalnych grafów *charakteryzujących* klasy takich grafów, dla których liczba kolorów używanych przez algorytm zachłanny podczas \mathcal{P} -kolorowania jest nie większa od ustalonej liczby naturalnej k . W kontekście tym, szczególnie istotne było rozstrzygnięcie, kiedy klasy te posiadają charakteryzacje przez *skończone zbiory grafów zabronionych*. Bardzo ograniczona obecnie wiedza na temat takich i podobnych charakteryzacji, stanowi jeden z prawdopodobnych powodów, dla których nie znajdujemy w literaturze wcześniejszych prób rozwinięcia powyższej idei w kierunku opracowania uniwersalnej metody projektowania.

Kolejnym z założonych celów powstania pracy [A1] było przeprowadzenie analizy złożoności obliczeniowej problemu \mathcal{P} -kolorowania algorytmem zachłannym. Kierując się wcześniejszymi doświadczeniami związanymi z zachłannym kolorowaniem właściwym, badania prowadziliśmy dwutorowo, tzn. analizowaliśmy złożoność obliczeniową problemu przy założeniu, że liczba kolorów k jest ustalona, prowadząc niezależnie analizę przypadku, w którym k stanowi część danych wejściowych problemu.

W szczególności, koncentrowaliśmy się na wykazaniu NP-zupełności problemu dla możliwie wielu wariantów \mathcal{P} -kolorowania (możliwie wielu klas \mathcal{P}) w przypadku, gdy k nie jest ustalone. Z punktu widzenia projektowania klas, bardzo ważnym celem było podanie *ogólnych własności*, które pozwoliłyby na scharakteryzowanie jak największej liczby wariantów, dla których problem nasz jest wielomianowy przy ustalonej liczbie kolorów k – ma to szczególne znaczenie zarówno dla możliwości praktycznego stosowania zaprojektowanych klas, jak również dla zagwarantowania możliwości dalszego ich rozszerzania.

2.2. Funkcje potencjału w analizie efektywności algorytmów

Wspomniana wcześniej trudność obliczeniowa problemu \mathcal{P} -kolorowania, stanowi naturalną motywację dla badań zmierzających do uzyskania górnych oszacowań dla liczby kolorów, które mogą być użyte przez algorytm zachłanny w najgorszym przypadku. Analogiczna motywacja wypływa z trudności obliczeniowej problemu ściśle związanego z kolorowaniem właściwym, jakim jest problem wyznaczania największego zbioru niezależnego (ang. *maximum independent set*).

W klasycznych oszacowaniach związanych z różnymi modelami kolorowania oraz niezależności, powszechnie wykorzystywane jest *pojęcie stopnia wierzchołka*. Niestety, w wielu przypadkach daje się zauważyć, że pojęcie to nie jest wystarczające do precyzyjnego odzwierciedlenia rzeczywistego charakteru szacowanego niezmiennika; niejednokrotnie użycie stopnia wierzchołka stanowi jedynie mało wnikliwą próbę opisu jego cech – odnoszącą się wyłącznie do *aspektu ilościowego* jakim jest liczba

jego sąsiadów. Wśród wymagań stawianych poszukiwanym przez nas nowym oszacowaniom, oczekiwaliśmy, między innymi, *przełamania prymatu klasycznych oszacowań wyrażanych przez stopnie wierzchołków*.

W badaniach naszych, skoncentrowaliśmy się na oszacowaniach, które można otrzymać na podstawie oszacowań klasycznych, przez zastąpienie stopni wierzchołków wartościami precyzyjnie wyznaczanych *funkcji potencjału*, które definiujemy na zbiorze wierzchołków grafu. W procesie wyznaczania funkcji potencjału, naturalną konsekwencją odejścia od ujęcia czysto ilościowego, jest konieczność uwzględnienia nie tylko liczby sąsiadów wierzchołka, ale również indywidualnych własności poszczególnych sąsiadów. Podejście takie pozwala na wzmocnienie, tak pożądanego, a niemal nieobecnego w oszacowaniach klasycznych *aspektu o charakterze jakościowym*.

Koncepcja oszacowań wykorzystujących funkcje potencjału, ma swoje korzenie w badaniach nad kolorowaniem grafów – pierwsze funkcje potencjału zdefiniowaliśmy właśnie w tym kontekście. Ponieważ problem kolorowania jest ściśle związany z problemem niezależności, podjęliśmy również badania zmierzające do zastosowania zdefiniowanych wcześniej funkcji potencjału, do otrzymania *nowych oszacowań dolnych dla liczby niezależności grafu*.

W kontekście problemu niezależności, wprowadzenie funkcji potencjału stworzyło również perspektywę użycia ich do zdefiniowania *nowych rodzin algorytmów*. Zdefiniowane przez nas nowe algorytmy zachłanne, stanowią uogólnienia dwóch klasycznych algorytmów wyznaczania zbiorów niezależnych, znanych w literaturze jako GreedyMAX oraz GreedyMIN. Wybierając do przetwarzania kolejne wierzchołki, algorytmy te kierują się regułami związanymi z własnościami ustalonej funkcji potencjału, podczas gdy ich klasyczne odpowiedniki dokonują wyboru wyłącznie na podstawie globalnych ekstremów funkcji, której wartości równe są stopniom wierzchołków grafu.

Celem badań nad funkcjami potencjału, zarówno w kontekście problemu kolorowania jak i niezależności, było nie tylko wyznaczenie funkcji potencjału, których wartości mogłyby zastąpić stopnie wierzchołków, ale również *otrzymanie oszacowań o charakterze algorytmicznym*, tzn. stanowiących gwarancję efektywności rozważanych przez nas algorytmów zachłannych. Jednym z kluczowych założeń było przy tym uzyskanie oszacowań, które można zastosować dla *dowolnych grafów* oraz takich, które dla każdego grafu są *co najmniej tak dobre, jak ich klasyczne odpowiedniki*.

Oszacowania nowego typu, spełniające powyższe założenia, podaliśmy w pracach [A1]–[A4]. W pracy [A2] dotyczą one problemu kolorowania właściwego, natomiast w pracy [A1] rozważamy \mathcal{P} -kolorowania dla dowolnych addytywnych dziedzicznych klas \mathcal{P} , przy czym w obu przypadkach koncentrujemy się na oszacowaniach typu Brooksa (patrz, Brooks [19]). Dla problemu niezależności, w pracach [A2], [A3] i [A4] analizujemy głównie oszacowania typu Caro-Wei (patrz, Caro [20] i Wei [64]). Prowadząc badania w kontekście wielu funkcji potencjału, w naturalny sposób stajemy przed problemem wyznaczenia *najlepszej funkcji potencjału dla danego algorytmu* – problem ten podejmuje w pracy [A3], gdzie podajemy taką funkcję dla algorytmów typu GreedyMIN. Badania dla algorytmów typu GreedyMAX kontynuujemy w pracy [A2].

2.3. Dynamiczne podziały grafów

We wcześniejszych badaniach, modelując złożone rzeczywiste systemy za pomocą grafów, zwykle koncentrowano się na grafach statycznych, czyli takich grafach, których struktura nie zmienia się w czasie. We współczesnych systemach (piszemy o nich również w sekcji 1) paradygmat modelowania z użyciem grafów statycznych może być niewystarczający, ponieważ zależności pomiędzy poszczególnymi elementami systemu zmieniają się dynamicznie wraz z upływem czasu. Wspólną cechą takich systemów jest to, że zmianom w czasie może podlegać struktura modelujących je grafów. Grafy takie nazywamy *grafami dynamicznymi*.

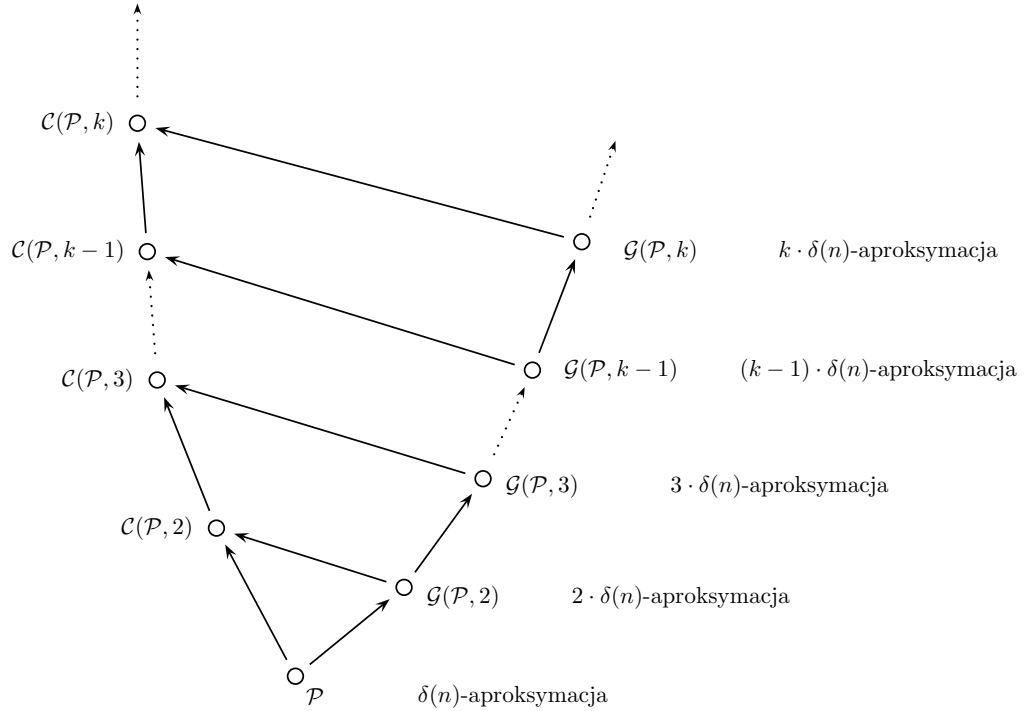
Jedną z naturalnych konsekwencji dopuszczenia zmian w strukturze grafu jest konieczność bieżącego weryfikowania rozwiązania problemu i ewentualnego dostosowania go do “aktualnego grafu”.

W literaturze rozważano kilka typów grafów dynamicznych, różniących się dopuszczalnością operacji dodawania oraz usuwania wierzchołków i krawędzi, z najogólniejszym typem nazywanym *grafem w pełni dynamicznym* (ang. *fully dynamic graph*), który dopuszcza wszystkie z powyższych operacji. W większości dotychczasowych prac dotyczących grafów dynamicznych, koncentrowano się na minimalizacji zamortyzowanego albo pesymistycznego kosztu dostosowywania rozwiązania. Najczęściej rozważano problemy optymalizacyjne takie jak: największe skojarzenie (ang. *maximum matching*), najmniejsze pokrycie wierzchołkowe (ang. *minimum vertex cover*) oraz różne warianty problemu najkrótszych ścieżek (patrz, np. Baswana i in. [7], Bhattacharya i in. [11] oraz Italiano [47]).

We wcześniejszych pracach dotyczących grafów dynamicznych, jedynym czynnikiem powodującym konieczność dostosowania rozwiązania była zmiana struktury grafu. Podejście takie uzależnia wszelkie zmiany w rozwiązaniu problemu od procesu ewolucji struktury grafu. Stanowi to istotne ograniczenie podczas modelowania wielu typów rzeczywistych systemów. W sformułowaniu przyjętym przez nas w pracach [A5] i [A6] *procesy ewolucji rozwiązań oraz struktury grafu są niezależne*. Pozwala to na bardziej elastyczne modelowanie systemów o różnych typach dynamiki, począwszy od tych, w których dynamika przejawia się głównie jako zmiany strukturalne po te, w których struktura grafu jest niemal stała a głównym źródłem dynamiki (wymuszającym dostosowywanie rozwiązań) są zmiany niestrukturalnych parametrów grafu, np. funkcji zdefiniowanych na zbiorze wierzchołków albo krawędzi. Precyzyjne określenie reguł rządzących dynamiką systemu składa się na definicję pojęcia określanego mianem *trybu dynamicznego*. Tryb rozważany w omawianych tu pracach [A5] i [A6] opisujemy dokładniej w punkcie 3.3.

W pracach [A5] oraz [A6] podejmujemy badania nad *dynamicznymi podziałami grafów*, tzn. podziałami grafów generowanymi w trybie dynamicznym. Tak jak w punkcie 2.1, podział grafu rozumiemy jako \mathcal{P} -kolorowanie, przy czym w obu pracach przyjmujemy, że klasa \mathcal{P} zdefiniowana jest przez jeden graf zabroniony F . W literaturze, podziały takie nazywane są również *kolorowaniami F -wolnymi*. W tym opracowaniu, kolorowanie F -wolne w trybie dynamicznym, nazywamy *dynamicznym kolorowaniem F -wolnym* albo w skrócie, gdy pozwala na to kontekst, *kolorowaniem dynamicznym*. W przyjętej przez nas definicji trybu dynamicznego, kolorowanie dynamiczne jest naturalnym uogólnieniem zarówno kolorowania offline jak również online; graf nie musi być dany z góry a prezentacja jego struktury podczas kolorowania dynamicznego jest podobna do prezentacji w trybie online. Najistotniejszą różnicą pomiędzy kolorowaniem dynamicznym a kolorowaniem online jest to, że przypisanie kolorów wierzchołkom podczas kolorowania dynamicznego *nie jest permanentne*, tzn. po pewnym czasie, niezależnie od algorytmu kolorującego oraz zmian zachodzących w strukturze grafu, wybrane wierzchołki mogą utracić kolor a algorytm może zostać poproszony ich ponowne pokolorowanie. W obu pracach koncentrujemy się na zagadnieniach związanych z analizą efektywności osiąganą przez algorytm zachłanny podczas dynamicznego kolorowania F -wolnego, przy czym praca [A5] w całości poświęcona jest dynamicznemu kolorowaniu właściwemu.

W powyższym kontekście, głównym celem badań nad efektywnością, było poszukiwanie klas grafów, dla których współczynnik konkurencyjności (ang. *competitive ratio*) algorytmu zachłannego można ograniczyć przez stałą. Interesowały nas również klasy grafów oraz działające na nich strategie przeciwnika algorytmu kolorującego, które prowadzą algorytm zachłanny do użycia dużej liczby kolorów. Kolejnym celem naszych badań było uwidocznienie jak bardzo nowe strategie różnią się od strategii znanych dla kolorowania w trybie online, oraz stwierdzenie jak duży wpływ na efektywność algorytmu kolorującego może mieć, niedozwolone w trybie online, żądanie zmiany koloru wierzchołka. Za istotne uznaliśmy również wskazanie możliwości zastosowania metody projektowania klas grafów i algorytmów (przedstawionej w punkcie 2.1) do projektowania klas wraz z algorytmami działającymi w trybie dynamicznym. Stanowiło to istotną motywację do powstania pracy [A6], poświęconej głównie własnościom strukturalnym grafów *charakteryzujących* wybrane klasy grafów, dla których liczba kolorów używanych przez algorytm zachłanny podczas rozważanego przez nas dynamicznego kolorowania F -wolnego jest nie większa niż ustalona liczba naturalna k .



Rysunek 1: Zależności pomiędzy klasami tworzącymi łańcuchy $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}(\mathcal{P}, 2) \subset \dots \subset \mathcal{C}(\mathcal{P}, k) \subset \dots$ oraz $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}(\mathcal{P}, 2) \subset \dots \subset \mathcal{G}(\mathcal{P}, k) \subset \dots$, przy czym $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ dla klas \mathcal{A}, \mathcal{B} oznacza $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

3. Omówienie osiągniętych wyników

3.1. Podziały grafów w projektowaniu klas grafów i algorytmów przybliżonych

Korzenie problemu kolorowania uogólnionego sięgają co najmniej czasów powstania pracy Chartranda i in. [21]. Od tego czasu zdefiniowano i systematycznie badano wiele wariantów tego problemu. Na przykład, o podziałach na grafy P_3 -wolne pisali, m.in. Albertson i in. [2], Broere i Mynhardt [17], Fiala i in. [30], a także Gimbel i Hartman [33]. Wyniki dla podziałów na grafy P_4 -wolne znajdujemy w pracach Gimbela i Nešetřila [34] oraz Hoànga i Le [44]. Dla kolorowania d -niewłaściwego interesującym źródłem są prace Bermonda i in. [9], Cowena i in. [25] oraz Haveta i in. [42]. Podziały grafów planarnych na lasy liniowe (lasy o składowych będących ścieżkami) badane były m.in. przez Poha [54] i Wanga [63].

Achlioptas [1] wykazał NP-zupełność problemu rozstrzygnięcia czy dla danego grafu G istnieje \mathcal{P} -kolorowanie co najwyżej k kolorami, gdy ustalone są: liczba całkowita $k \geq 2$ i klasa \mathcal{P} zdefiniowana przez zabronienie jednego grafu rzędu $n \geq 3$. Stanowi to naturalne rozszerzenie wyniku o NP-zupełności problemu kolorowania właściwego (zabroniony jest graf K_2), którego trudność dla każdego ustalonego $k \geq 3$ można otrzymać korzystając z wyników Lovásza dla $k = 3$ (patrz praca [52]). Przegląd złożoności obliczeniowej dla wielu wariantów znajdujemy, np. w pracy Broersmy i in. [18] oraz książce Jensena i Tofta [48], natomiast dla kolorowania właściwego wyczerpujący opis wielu przypadków podają Golovach i in. [37].

Szczególnym wyrazem trudności obliczeniowej powyższych problemów jest *niemal całkowity brak znajomości zbiorów minimalnych grafów zabronionych*, charakteryzujących klasy wszystkich grafów posiadających \mathcal{P} -kolorowanie co najwyżej k kolorami – klasy takich grafów oznaczamy przez $\mathcal{C}(\mathcal{P}, k)$. Jedyny znany wyjątek stanowi klasa grafów 2-kolorowalnych w wariacie kolorowania właściwego, która pokrywa się z klasą grafów dwudzielnych, czyli klasą definiowaną przez zabronienie wszystkich cykli o długości nieparzystej. Ostatnio, dla kolorowania właściwego, ograniczając się głównie do

przypadku $k \in \{3, 4\}$, w szczególnych klasach grafów zbiory minimalnych grafów zabronionych opisali Hoàng i in. [45], Chudnovsky i in. [23] oraz Godgebeur i Schaudt [35].

Chociaż, jak w powyższych pracach, dla uzyskania kolejnych wyników ustalenie klasy \mathcal{P} oraz liczby k wydaje się nieuniknione, to jednak poszukiwania interesujących podklas klasy $\mathcal{C}(\mathcal{P}, k)$ prowadzą nas do bardzo ogólnych wniosków, które formułujemy dla klas $\mathcal{G}(\mathcal{P}, k)$, przy czym przez $\mathcal{G}(\mathcal{P}, k)$ oznaczamy klasę wszystkich grafów, dla których *algorytm zachłanny* generuje \mathcal{P} -kolorowania co najwyżej k kolorami. Dla *dowolnej* addytywnej dziedzicznej klasy \mathcal{P} i *dowolnego* $k \geq 2$ zachodzą następujące inkluzje:

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{G}(\mathcal{P}, k) \subset \mathcal{C}(\mathcal{P}, k).$$

Zależności te przedstawiamy na rysunku 1. Znaczna część pracy [A1] poświęcona jest analizie własności klas $\mathcal{G}(\mathcal{P}, k)$ oraz złożoności obliczeniowej problemów ściśle związanych z tymi klasami. W odróżnieniu od klas $\mathcal{C}(\mathcal{P}, k)$, dzięki wynikom podanym w pracy [A1], wiele klas $\mathcal{G}(\mathcal{P}, k)$ *można w praktyce zaprojektować* (przypomnijmy, że przez zaprojektowanie klasy rozumiemy wyznaczenie charakteryzującego ją zbioru minimalnych grafów zabronionych).

Po przedstawieniu głównych wyników pracy [A1] podajemy przykład projektu klasy rozszerzającej, bardzo znaną i istotną z algorytmicznego punktu widzenia klasę grafów P_5 -wolnych. Ilustrując praktyczną przydatność metody, poszerzamy równocześnie zakres jej zastosowań, wskazując możliwość projektowania rozszerzeń klas, podczas którego można “kontrolować” różnorodne ograniczenia górne, np. związane z pojęciem χ -ograniczonosci.

Największą liczbę kolorów, które mogą być użyte podczas \mathcal{P} -kolorowania algorytmem zachłannym danego grafu G nazywamy *liczbą \mathcal{P} -Grundy* tego grafu i oznaczamy przez $\Gamma_{\mathcal{P}}(G)$. Dla kolorowania właściwego liczbę tę zdefiniowali wcześniej Christen i Selkow [22], nazywając ją *liczbą Grundy* $\Gamma(G)$ grafu G . W kontekście złożoności obliczeniowej, Hedetniemi i in. [43] postawili hipotezę o NP-zupełności problemu rozstrzygnięcia czy dla danego grafu G i liczby całkowitej k zachodzi $\Gamma(G) \geq k$ (por. rozdz. 10.4, Jensen i Toft [48]). Po długim czasie powyższą hipotezę udowodnili Goyal i Vishwanathan [38] wykazując, że odnośny problem jest NP-zupełny nawet wtedy, gdy G jest grafem spiętym (ang. *chordal graph*). Nieco później, Zaker [65] udowodnił NP-zupełność tego problemu dla grafów będących dopełnieniami grafów dwudzielnych.

W pracy [A1] rozszerzamy powyższe rezultaty na warianty \mathcal{P} -kolorowania, w których \mathcal{P} jest klasą grafów K_p -wolnych, $p \geq 3$.

W szczególności, dla każdej z powyższych klas \mathcal{P} , wykazaliśmy NP-zupełność problemu rozstrzygnięcia, czy dla danego grafu G i liczby całkowitej k zachodzi $\Gamma_{\mathcal{P}}(G) \geq k$. Zastosowaliśmy wielomianową redukcję z problemu 3-kolorowania grafów planarnych o stopniu ograniczonym przez 4, takich że każdy wierzchołek należy do jakiegoś trójkąta a reszta z dzielenia liczby krawędzi grafu przez ustaloną liczbę całkowitą $r \geq 2$ wynosi 1. Redukcję taką umożliwiło wcześniejsze *wzmocnienie* przez nas wyniku Gareya, Johnsona i Stockmeyera [32] mówiącego o NP-zupełności problemu 3-kolorowania grafów planarnych o stopniu ograniczonym przez 4. Dodając warunki dotyczące trójkątów i podzielności rozmiaru grafu, zawęziliśmy klasę grafów opisując równocześnie dodatkowe własności posiadane przez należące do niej grafy.

Ponadto, w pracy [A1] wykazaliśmy coNP-zupełność problemu rozstrzygnięcia, czy dla danego grafu G i nieujemnej liczby całkowitej t , algorytm zachłannego \mathcal{P} -kolorowania jest bezwzględnie t -przybliżony, tzn. czy spełniona jest nierówność $\Gamma_{\mathcal{P}}(G) - \chi_{\mathcal{P}}(G) \leq t$, gdzie $\chi_{\mathcal{P}}(G)$ oznacza *liczbę \mathcal{P} -chromatyczną* grafu G będącą najmniejszą liczbą k , dla której istnieje \mathcal{P} -kolorowanie grafu G za pomocą k kolorów.

W kontekście złożoności obliczeniowej, w pracy [A1] *podaliśmy również przypadki wielomianowe*. Możliwość ich opisania pojawiła się dzięki *wprowadzeniu przez nas pojęcia k -krytycznego podziału*

grafu, który jest podziałem zbioru wierzchołków na dwa zbiory o własnościach będących konsekwencją zastosowania reguły zachłannego \mathcal{P} -kolorowania. Własności te są ściśle powiązane z uogólnionymi pojęciami silnego dominowania i niezależności.

Przyjmijmy, że $\mathcal{F}(\mathcal{P}, k)$ oznacza klasę wszystkich grafów posiadających podziały k -krytyczne. W pracy [A1] wykazaliśmy, że zbiór grafów minimalnych (ze względu na branie podgrafów indukowanych) w klasie $\mathcal{F}(\mathcal{P}, k + 1)$ jest równocześnie zbiorem minimalnych grafów zabronionych charakteryzujących klasę $\mathcal{G}(\mathcal{P}, k)$. W szczególności oznacza to, że grafy charakteryzujące klasę $\mathcal{G}(\mathcal{P}, k)$ posiadają wspomniane powyżej własności związane z podziałami k -krytycznymi. Fakt ten pozwolił na wykazanie, że klasa $\mathcal{G}(\mathcal{P}, k)$ posiada charakteryzację przez skończony zbiór grafów zabronionych wyłącznie wtedy, gdy charakteryzację taką posiada również klasa \mathcal{P} . Oznacza to, że jeżeli \mathcal{P} jest addytywną dziedziczną klasą grafów daną przez skończony zbiór minimalnych grafów zabronionych, to dla ustalonego k (nie stanowiącego części danych wejściowych) oraz danego grafu G , problem rozstrzygnięcia czy $\Gamma_{\mathcal{P}}(G) \geq k$, można rozwiązać w czasie wielomianowym.

Należy podkreślić, że do tej pory znane były wyłącznie charakteryzacje klas $\mathcal{G}(\mathcal{P}, 2)$ oraz $\mathcal{G}(\mathcal{P}, 3)$, podane przez Gyárfása i in. [40] dla kolorowania właściwego.

Kluczową cechą opisaną przez nas metody, oprócz możliwości zaprojektowania rozszerzania klasy, jest możliwość otrzymywania nowych algorytmów przybliżonych – działających na rozszerzeniach klas bazowych. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $\mathcal{G}(\mathcal{P}, k)$ jest klasą zaprojektowaną przez nas na podstawie pewnej klasy bazowej \mathcal{P} , dla której znamy $\delta(n)$ -przybliżony algorytm A dla problemu minimalizacyjnego Π . Ponadto przyjmijmy, że podział (V_1, \dots, V_k) zbioru wierzchołków jest dowolnym \mathcal{P} -kolorowaniem utworzonym przez algorytm zachłanny dla pewnego grafu $G \in \mathcal{G}(\mathcal{P}, k)$. Wówczas, grafy G_1, \dots, G_k , indukowane przez odpowiednie zbiory podziału, należą do klasy \mathcal{P} , co oznacza, że dla każdego z nich można zastosować algorytm A .

Zatem, jeżeli Π jest problemem którego *rozwiązania posiadają własność składania*, tzn. istnieje algorytm, który na podstawie danych na wejściu rozwiązań problemu Π , wygenerowanych przez A dla każdego z grafów G_1, \dots, G_k (wartości tych rozwiązań oznaczamy przez $A(G_i)$, $1 \leq i \leq k$), tworzy w wielomianowym czasie rozwiązanie problemu Π o wartości $S_{\Pi}(G)$ dla grafu G takie, że

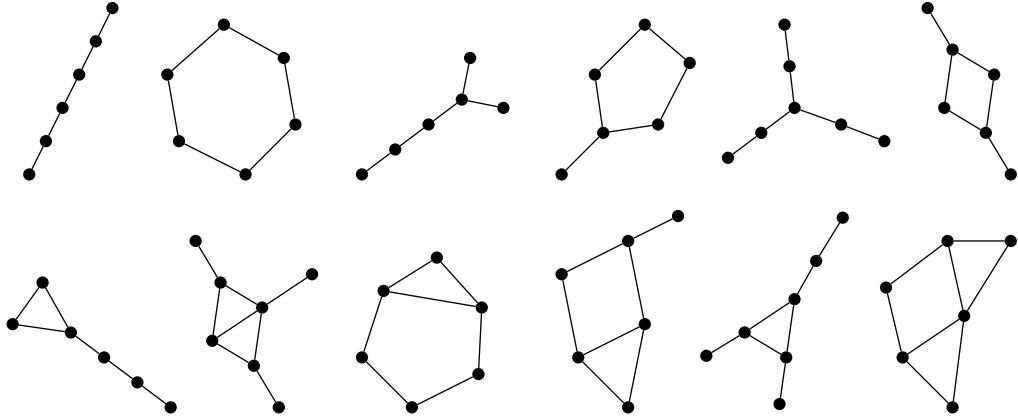
$$S_{\Pi}(G) \leq k \cdot \max_{1 \leq i \leq k} A(G_i), \quad (1)$$

to połączenie powyższych kroków – tworzenie podziału, rozwiązanie problemu Π dla grafów wynikających z podziału, składanie rozwiązań – daje 3-fazowy *wielomianowy algorytm $k \cdot \delta(n)$ -przybliżony dla problemu Π na klasie $\mathcal{G}(\mathcal{P}, k)$* .

Zauważmy, że wiele problemów posiada własność składania rozwiązań, np. użycie rozłącznych zbiorów kolorów w kolorowaniach właściwych poszczególnych grafów G_1, \dots, G_k , w oczywisty sposób daje kolorowanie właściwe grafu G spełniające warunek (1). Warunek ten spełnia również zbiór dominujący w grafie G będący sumą zbiorów dominujących w poszczególnych grafach G_1, \dots, G_k .

Oprócz zastosowań w opisanym powyżej kontekście algorytmów przybliżonych, zaproponowaną przez nas metodę można zastosować w znacznie szerszym zakresie. Pozwala ona na projektowanie rozszerzeń klas grafów, podczas którego (podobnie jak dla współczynnika aproksymacji) możemy kontrolować *zmiany ograniczeń górnych różnych niezmienników grafowych*, np. ograniczeń zapewniających χ -ograniczoną klasę.

Klasę \mathcal{P} nazywamy *χ -ograniczoną*, jeżeli istnieje taka funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego grafu $G \in \mathcal{P}$ zachodzi $\chi(G) \leq f(\omega(G))$, gdzie $\chi(G)$ oznacza liczbę chromatyczną, natomiast $\omega(G)$ liczbę klikową grafu G . Funkcję f spełniającą powyższą nierówność nazywamy *χ -ograniczającą* dla klasy \mathcal{P} . Klasy χ -ograniczone badane są od lat. Nieustannie poszukiwane są nowe klasy oraz lepsze funkcje ograniczające. Dla wielu znanych klas, do tej pory nie wiemy czy są χ -ograniczone. Ciekawą *motywację do badania χ -ograniczonności* klas odnajdujemy w pracy Gyárfása [39], w której fakt, bycia klasą



Rysunek 2: Minimalne grafy zabronione dla klasy \mathcal{Q} .

χ -ograniczoną uznawany jest za istotną przesłankę istnienia dla klasy wielomianowego algorytmu aproksymacyjnego dla kolorowania właściwego.

Podane przez nas wyniki można zastosować do zaprojektowania nowych klas χ -ograniczonych. Mianowicie, mając daną χ -ograniczoną dziedziczną addytywną klasę \mathcal{P} z funkcją χ -ograniczającą f , dla każdego $k \geq 2$, stosując własności podziałów k -krytycznych, możemy otrzymać rozszerzenie $\mathcal{G}(\mathcal{P}, k)$ klasy \mathcal{P} będące nową klasą χ -ograniczoną o funkcji χ -ograniczającej $k \cdot f$.

W pracy [39] Gyárfás sformułował hipotezę o istnieniu wielomianowej funkcji χ -ograniczającej dla klasy grafów P_5 -wolnych; podał też wykładniczą funkcję χ -ograniczającą. Obecnie znane są jedynie funkcje wielomianowe dla wybranych podklas (patrz, np. Fouquet i in. [31], Schiermeyer [58]).

Na podstawie naszych wyników z pracy [A1] wnioskujemy, że prawdziwość powyższej hipotezy pociągałaby za sobą istnienie wielomianowych funkcji χ -ograniczających również dla nieskończenie wielu rozszerzeń klasy grafów P_5 -wolnych (patrz $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}(\mathcal{P}, 2) \subset \dots \subset \mathcal{G}(\mathcal{P}, k) \subset \dots$ na rysunku 1).

Interesującym algorytmicznie wariantem χ -ograniczonności jest online χ -ograniczonność (patrz, np. Kierstead [49] oraz Borowiecki [13]). O klasie \mathcal{P} mówimy, że jest online χ -ograniczona, jeżeli istnieje algorytm online A i taka funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego grafu $G \in \mathcal{P}$ zachodzi $A(G) \leq f(\omega(G))$. Zauważmy, że każda klasa online χ -ograniczona jest χ -ograniczona.

Naturalnie, pierwsze dwie fazy opisanego wcześniej algorytmu 3-fazowego mogą być zrealizowane w trybie online. Jeżeli ponadto faza składania rozwiązań może być zrealizowana w trybie online – jest tak, np. dla kolorowania właściwego – to cały algorytm 3-fazowy może być uznany za algorytm online. Wówczas, na podstawie wyników uzyskanych przez nas w pracy [A1] dla dowolnego $k \geq 2$, $\delta(n)$ -konkurencyjność (ang. *competitiveness*) algorytmu online A , realizującego fazę drugą na grafach z klasy \mathcal{P} , w naturalny sposób przekłada się na $k \cdot \delta(n)$ -konkurencyjność 3-fazowego algorytmu online na grafach należących do klasy $\mathcal{G}(\mathcal{P}, k)$.

W kontekście obu wariantów χ -ograniczonności rozważmy, dla przykładu, klasę \mathcal{Q} zdefiniowaną przez minimalne grafy zabronione przedstawione na rysunku 2. Klasę tę zaprojektowaliśmy korzystając między innymi z własności podziałów k -krytycznych tak, aby zachodziły następujące inkluzje:

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{G}(\mathcal{P}, 2), \quad \mathcal{Q} \subset \mathcal{R},$$

gdzie \mathcal{P} i \mathcal{R} są, odpowiednio, klasami grafów P_5 -wolnych i (P_6, C_6) -wolnych. Klasa \mathcal{Q} oraz klasy $\mathcal{G}(\mathcal{P}, k)$ dla $k \geq 2$, z wyjątkiem jednego przykładu podanego w 1995 roku przez Kiersteada i in. [50], są jedynymi znanymi obecnie rozszerzeniami klasy grafów P_5 -wolnych, dla których istnieją funkcje online χ -ograniczające. Warto zauważyć, że pomimo iż Gyárfás i Lehel [41] wykazali, że już dla klasy \mathcal{R} nie istnieje funkcja online χ -ograniczająca, to stosując naszą metodę, można klasę \mathcal{Q} dalej rozszerzać otrzymując, np. klasę $\mathcal{G}(\mathcal{Q}, 2)$.

3.2. Funkcje potencjału w analizie efektywności algorytmów

3.2.1. Oszacowania związane z problemem podziałów

Podane przez Brooksa [19] oszacowanie górne

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \quad (2)$$

liczby chromatycznej $\chi(G)$ grafu G , w którym $\Delta(G)$ oznacza największy stopień wierzchołka grafu G , jest fundamentalnym i zarazem jednym z najbardziej rozpoznawalnych wyników teorii grafów. Oszacowanie to podane zostało wraz z charakteryzacją grafów, dla których $\chi(G) = \Delta(G) + 1$. Proste w interpretacji i wygodne w użyciu, oszacowanie Brooksa dało początek wielu nowym koncepcjom i powstałym na ich gruncie technikom – interesującego przeglądu zagadnień teoretycznych, związanych z tym oszacowaniem dokonali Cranston i Rabern [26]. Niewątpliwą zaletą oszacowania Brooksa jest możliwość stosowania dla dowolnych grafów (oszacowań takich jest niewiele). Ceną za uniwersalność jest jednak nieco słabsza jakość oszacowania w szczególnych przypadkach, np. dla grafów, w których wszyscy sąsiedzi wierzchołków największego stopnia mają stopnie dużo mniejsze niż $\Delta(G)$. Problem ten częściowo wyeliminował Stacho [60] definiując dla grafu G parametr $\Delta_2(G)$, wyznaczany na podstawie *największego stopnia wśród wybranych sąsiadów* każdego wierzchołka. Stacho udowodnił, że dla każdego grafu G zachodzi $\Delta_2(G) \leq \Delta(G)$ oraz $\chi(G) \leq \Delta_2(G) + 1$, otrzymując tym samym wzmocnienie oszacowania Brooksa.

W pracach [A1] i [A2], oceniając wpływ sąsiadów wierzchołka na przypisywany mu kolor, stosujemy wprowadzone przez nas w pracy [A4] pojęcie *krotki schodkowej* w multizbiorze. Pojęcia tego używamy do wyznaczenia *prostego potencjału schodkowego* $p_G(v)$ wierzchołka v grafu G , rozumianego jako długość maksymalnej krotki schodkowej w multizbiorze tworzonym przez stopnie wszystkich sąsiadów wierzchołka v (z definicji krotki schodkowej wynika, że $p_G(v) \leq d_G(v)$, gdzie $d_G(v)$ jest stopniem wierzchołka v). Wyznaczając potencjał schodkowy dla każdego wierzchołka v grafu G otrzymujemy funkcję $p_G : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$, którą nazywamy *funkcją prostego potencjału schodkowego* grafu G . Koncepcję tę rozwinęliśmy w pracy [A2], w której *zdefiniowaliśmy deterministyczny skończony proces iteracyjny*, wyznaczający w kolejnych krokach funkcje $q_G^{(0)}, \dots, q_G^{(t)}$ określone na zbiorze wierzchołków grafu G i wartościach w zbiorze liczb naturalnych. Inicjalnie, dla każdego wierzchołka v przyjmujemy $q_G^{(0)}(v) = d_G(v)$, natomiast wartość $q_G^{(i)}(v)$, gdy $1 \leq i \leq t$ wyznaczana jest jako długość maksymalnej krotki schodkowej w multizbiorze tworzonym przez wartości funkcji $q_G^{(i-1)}(u)$ dla wszystkich sąsiadów u wierzchołka v (naturalnie $q_G^{(1)}(v) = p_G(v)$). Wykazaliśmy *monotoniczność i zbieżność* powyższego procesu dla dowolnych grafów. Funkcję q_G taką, że dla każdego wierzchołka v zachodzi $q_G(v) = q_G^{(t)}(v)$, nazywamy *funkcją potencjału schodkowego* grafu G . Maksimum funkcji q_G nazywamy *potencjałem schodkowym* grafu G i oznaczamy przez $Q(G)$.

W pracy [A2] wykazaliśmy, że $Q(G) \leq \Delta_2(G)$. Wykazaliśmy również, że $Q(G)$ spełnia warunki wymagane do zastosowania twierdzenia Szekeresa-Wilfa [61]. W rezultacie otrzymaliśmy następujące *wzmocnienie oszacowania Stacho*:

$$\chi(G) \leq Q(G) + 1. \quad (3)$$

Ponadto, powołując się na wynik Erdősa i Wilsona [29] o liczbie wierzchołków najwyższego stopnia, wykazaliśmy, że dla prawie wszystkich grafów G zachodzi $Q(G) < \Delta(G)$, co oznacza, że *dla prawie wszystkich grafów oszacowanie nasze jest lepsze niż oszacowanie Brooksa*.

W kontekście algorytmicznym, znanym faktem jest, że dla kolorowania właściwego algorytmem zachłannym mamy $\Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1$ (przypomnijmy, że $\chi(G) \leq \Gamma(G)$). Oszacowanie to poprawił Zaker [66] dowodząc, że $\Gamma(G) \leq \Delta_2(G) + 1$. W pracy [A2] wzmocniliśmy oszacowanie Zakera wykazując, że dla każdego grafu

$$\Gamma(G) \leq Q(G) + 1. \quad (4)$$

Według naszej wiedzy, jest to aktualnie *najlepsze oszacowanie górne liczby Grundy*, wśród oszacowań, które można wyznaczyć dla *dowolnego grafu*.

Trudność obliczeniowa problemów związanych z uogólnionym kolorowaniem grafów (patrz punkt 3.1) stanowi naturalny kontekst i motywację do poszukiwania oszacowań o charakterze zbliżonym do (4), jednak działających *dla wszystkich wariantów \mathcal{P} -kolorowania*. Problem ten podejmujemy w pracy [A1]. Uogólniając pojęcie stopnia i sąsiedztwa wierzchołka, oraz wprowadzając pojęcie intensywności zbioru wierzchołków, *zdefiniowaliśmy deterministyczny uogólniony proces iteracyjny*, wyznaczający w kolejnych krokach funkcje $\phi_G^{(0)}, \dots, \phi_G^{(t)}$ określone na zbiorze wierzchołków grafu G i wartościach w zbiorze liczb naturalnych. Podobnie jak w pracy [A2], dla każdego wierzchołka v przyjmujemy $\phi_G^{(0)}(v) = d_G(\mathcal{P}, v)$, przy czym $d_G(\mathcal{P}, v)$ oznacza jego uogólniony stopień. Wartość $\phi_G^{(i)}(v)$ dla $i \geq 1$ jest długością maksymalnej krotki schodkowej w multizbiorze tworzonym przez wartości intensywności wierzchołków należących do określonego zbioru wierzchołków, ściśle związanego z wierzchołkiem v . Wykazaliśmy *monotoniczność i zbieżność* procesu dla każdego grafu G . Wyznaczaną przez proces funkcję ϕ_G taką, że dla każdego wierzchołka v zachodzi $\phi_G(v) = \phi_G^{(t)}(v)$, nazywamy *uogólnioną funkcją potencjału schodkowego* grafu G . Korzystając ze zdefiniowanej tak funkcji, udowodniliśmy, że dla dowolnej addytywnej dziedzicznej klasy \mathcal{P} i dowolnego grafu G zachodzi

$$\Gamma_{\mathcal{P}}(G) \leq \Phi_{\mathcal{P}}(G) + 1, \quad (5)$$

gdzie $\Phi_{\mathcal{P}}(G)$ oznacza maksimum funkcji ϕ_G . Jest to *najlepsze obecnie oszacowanie górne liczby \mathcal{P} -Grundy dowolnego grafu G* .

Oprócz oszacowania liczby chromatycznej, twierdzenie Brooksa [19] przynosi rozstrzygnięcie problemu charakteryzacji grafów, dla których $\chi(G) = \Delta(G) + 1$. Problem ten można rozwiązać w czasie wielomianowym, gdyż, jak udowodnił Brooks, jedynymi grafami, dla których $\chi(G) = \Delta(G) + 1$, są grafy o składowych będących grafami pełnymi lub cyklami o nieparzystej długości. W kontekście tym, w pracy [A2] wykazaliśmy NP -zupełność problemu rozstrzygnięcia czy dla danego grafu G , dla którego $Q(G) \geq 3$, zachodzi $\chi(G) < Q(G) + 1$. W ten sposób, wskazaliśmy również *nową nietrywialną klasę grafów optymalnie kolorowalnych algorytmem zachłannym*, składającą się z grafów, dla których $\chi(G) = Q(G) + 1$ (literatura dotycząca grafów optymalnie kolorowalnych przez algorytm zachłanny jest bardzo ograniczona).

W tej samej pracy, *sformulowaliśmy hipotezę* mówiącą o prawdziwości następującego wzmocnienia hipotezy Reeda [56]:

$$\chi(G) \leq \left\lceil \frac{Q(G) + \omega(G) + 1}{2} \right\rceil. \quad (6)$$

Hipoteza Reeda mówiąca, że $\chi(G) \leq \lceil (\Delta(G) + \omega(G) + 1)/2 \rceil$, jest intensywnie badana, jednak do tej pory, udowodniono ją jedynie w kilku szczególnych przypadkach (patrz, np. Schiermeyer [58]). Prawdziwość naszej hipotezy wykazaliśmy m.in. dla wspomnianej powyżej klasy grafów spełniających $\chi(G) = Q(G) + 1$. Wskazaliśmy również klasy grafów, dla których oszacowanie (6) jest dokładne, natomiast różnica pomiędzy wartością oszacowania Reeda a wartością oszacowania (6) nie posiada ograniczenia przez stałą. Wyniki o takim charakterze wykazaliśmy także, gdy brane są pod uwagę oszacowania (3) i (4) oraz ich odpowiedniki autorstwa Stacho i Zakera.

Omówione w tym punkcie nowe oszacowania górne, mogą być stosowane dla dowolnych grafów, przy czym nigdy nie są one gorsze od swoich klasycznych odpowiedników, a oszacowanie (3) dla prawie wszystkich grafów jest lepsze od oszacowania Brooksa.

3.2.2. Oszacowania związane z problemem niezależności

Podane przez Caro [20] i Wei [64] oszacowanie dolne

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d_G(v) + 1}, \quad (7)$$

liczby niezależności $\alpha(G)$ grafu G , niezależnie udowodnili również Alon i Spencer [3] oraz Selkow [59] podczas, gdy Griggs [36] oraz Chvátal i McDiarmid [24] wykazali, że stanowi ono również dolne ograniczenie mocy zbioru niezależnego generowanego przez algorytm zachłanny GreedyMAX (znane są także dowody tego samego ograniczenia dla zbioru generowanego przez algorytm GreedyMIN). Oba algorytmy należą obecnie do kanonu klasyki. Wraz z odpowiednimi funkcjami potencjału stanowiły dla nas podstawę do zdefiniowania nowych rodzin (typów) algorytmów zachłanych dla problemu niezależności.

W pracach [A2], [A3] i [A4] wyróżniamy i analizujemy dwa typy algorytmów: *algorytmy typu GreedyMAX* oraz *algorytmy typu GreedyMIN*.

Wspólną cechą algorytmów obu typów jest stosowanie zdefiniowanych przez nas *reguł selekcji*, ściśle związanych z używaną przez algorytm funkcją potencjału. Reguły selekcji pozwalają algorytmowi na wybranie tzw. *wierzchołka krytycznego*. W zarysie, po dokonaniu wyboru wierzchołka krytycznego, algorytm typu GreedyMAX usuwa go z grafu, wraz ze wszystkimi incydentnymi z nim krawędziami. Operacje wyboru i usuwania powtarzane są do momentu otrzymania grafu bezkrawędziowego, którego zbiór wierzchołków stanowi pewne rozwiązanie problemu. Algorytm typu GreedyMIN, wybiera wierzchołek krytyczny i dodaje go do tworzonego na bieżąco zbioru niezależnego, a następnie usuwa z grafu wraz ze wszystkimi wierzchołkami sąsiednimi. Operacje wyboru, dodawania i usuwania powtarzane są do momentu otrzymania grafu pustego.

Poszczególne reguły selekcji stosowane w pracach [A2], [A3] i [A4] istotnie się różnią. W pracy [A3] zaproponowaliśmy ogólne, unifikujące ujęcie, umożliwiające stosowanie obu typów algorytmów wraz z różnymi funkcjami potencjału (patrz twierdzenie 3 i 4). W szczególności, sformułowaliśmy *ogólne reguły selekcji*, w których m.in. wymagamy aby dla wierzchołka krytycznego funkcja potencjału osiągała lokalne maksimum, gdy rozważamy algorytm typu GreedyMAX, albo lokalne minimum, gdy rozważany algorytm jest typu GreedyMIN. Nieco odmienne ujęcie zaprezentowaliśmy we wcześniejszej pracy [A4], w której rozważaliśmy algorytm typu GreedyMAX wykorzystujący funkcję prostego potencjału schodkowego p_G . Zamiast warunku dotyczącego lokalnego maksimum, definiując wierzchołek krytyczny, wzięliśmy pod uwagę zależność pomiędzy jego stopniem a wartościami funkcji prostego potencjału schodkowego jego sąsiadów – w tym szczególnym przypadku, pozwoliło to na sformułowanie kryteriów selekcji umożliwiających wybór wierzchołków nieuwzględnianych przez regułę podaną w pracy [A3] (patrz, np. kryterium (C4)). Istotną zaletą ujęcia przedstawionego w pracy [A3] pozostaje jednak jego uniwersalność.

We wszystkich przypadkach, rozważanych w pracach [A3] i [A4], wykazaliśmy, że dla generowanego przez odpowiedni algorytm zachłanny zbioru niezależnego I zachodzi

$$|I| \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{f_G(v) + 1}, \quad (8)$$

przy czym f_G oznacza stosowaną przez algorytm funkcję potencjału.

W pracy [A3] podjęliśmy również badania zmierzające do wyznaczenia najlepszej funkcji potencjału dla algorytmu typu GreedyMIN stosującego regułę selekcji opisaną w twierdzeniu 3. Efektem naszych badań jest wyznaczenie takiej właśnie funkcji, jak również podanie algorytmu o nazwie *Carless cutting*, pozwalającego na jej wyznaczenie dla dowolnego grafu G (w pracy [A3] funkcję tę

oznaczamy przez p_G^*). Dla algorytmów typu GreedyMAX wyznaczenie funkcji o podobnym charakterze pozostaje problemem otwartym.

W tej samej pracy zdefiniowaliśmy funkcję $\gamma_G : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ określoną na zbiorze wierzchołków grafu G i wartościach w zbiorze liczb naturalnych taką, że dla wierzchołka v zachodzi $\gamma_G(v) = \Gamma(v) - 1$, gdzie $\Gamma(v)$ oznacza liczbę Grundy wierzchołka v zdefiniowaną jako wartość największego koloru, który może być przypisany wierzchołkowi v w kolorowaniu właściwym algorytmem zachłannym⁴. Wykorzystując funkcję γ_G sformułowaliśmy hipotezę mówiącą, że dla każdego grafu G zachodzi następujące oszacowanie:

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{\gamma_G(v) + 1}. \quad (9)$$

Hipotezę tę udowodniliśmy dla klasy grafów, w których każdy wierzchołek wraz z wierzchołkami odległymi od niego o co najwyżej $d_G(v)$, indukuje drzewo (ang. *locally treelike graphs*). W dowodzie hipotezy korzystaliśmy ze wspomnianego już twierdzenia 3, zatem wykazaliśmy również, że jeżeli algorytm GreedyMIN stosuje funkcję γ_G (tzn. $f_G = \gamma_G$), to dla każdego grafu G , z powyższej klasy, generuje on zbiór niezależny I spełniający nierówność (8).

W pracy [62] Thiele podał oszacowanie dolne dla liczby niezależności dowolnego hipergrafu, które jest jednocześnie oszacowaniem mocy zbioru niezależnego generowanego przez algorytm zachłanny, którego zasada działania jest niemal identyczna jak algorytmu GreedyMAX. Dowody podane przez Thiele są konstruktywne i stanowią stosunkowo naturalne, choć z pewnością nietrywialne uogólnienie idei stosowanych w dowodach dla grafów. W pracy [A3] podajemy krótką probabilistyczną wersję dowodu oszacowania Thiele, będącą adaptacją metody użytej przez Alona i Spencera [3] oraz Selkowa [59]. Rozszerzamy w ten sposób paletę wyników o analizę prostego algorytmu randomizowanego.

W pracy [A2] kontynuując poszukiwania nowych funkcji potencjału dla algorytmów typu GreedyMAX, zdefiniowaliśmy funkcję potencjału schodkowego q_G (patrz również opis w punkcie 3.2.1). Wykazaliśmy, że jeżeli algorytm typu GreedyMAX stosuje funkcję potencjału schodkowego (tzn. $f_G = q_G$), to dla zbioru niezależnego I zwracanego na wyjściu algorytmu zachodzi oszacowanie (8). Na podstawie definicji i własności monotoniczności procesu iteracyjnego wyznaczającego funkcję q_G , wnioskujemy, że dla każdego wierzchołka v dowolnego grafu G zachodzi $q_G(v) \leq p_G(v)$. Oszacowanie, podane przez nas w pracy [A2] jest zatem wzmocnieniem oszacowania otrzymanego dla algorytmu typu GreedyMAX stosującego funkcję p_G , które podaliśmy wcześniej w pracach [A3] i [A4]. Należy podkreślić, że wynik ten uzyskaliśmy dzięki wcześniejszemu wzmocnieniu twierdzenia 4 z pracy [A3], które polegało na zmniejszeniu wymagań dotyczących liczby sąsiadów wierzchołka krytycznego, których potencjały muszą ulec zmianie, gdy wierzchołek krytyczny zostanie usunięty z grafu (w regule selekcji w twierdzeniu 4 wymaganie to dotyczyło wszystkich sąsiadów).

W pracach [A2] i [A4] wykazaliśmy również, że jeżeli $f_G = p_G$ albo $f_G = q_G$, to dla dowolnej liczby naturalnej $\eta > 0$ istnieją spójne grafy G takie, że

$$\sum_{v \in V(G)} \left(\frac{1}{f_G(v) + 1} - \frac{1}{d_G(v) + 1} \right) > \eta. \quad (10)$$

Grafy te tworzą klasy, dla których różnica pomiędzy wartością oszacowania (8) oraz oszacowania Caro-Wei (7) nie posiada ograniczenia przez stałą.

Należy podkreślić, że zdecydowana większość przedstawionych w tym punkcie nowych oszacowań dolnych, może być stosowana dla dowolnych grafów, przy czym oszacowania te nigdy nie są gorsze od swoich klasycznych odpowiedników. Interesującym przeglądem odnoszącym się do wielu spośród przedstawionych powyżej zagadnień jest praca Rautenbacha [55].

⁴w pracy [A3] najmniejszemu kolorowi odpowiada liczba 0.

3.3. Dynamiczne podziały grafów

Kolorowanie dynamiczne można interpretować jako grę dwóch przeciwników nazywanych Prezentem i Malarzem. W kolejnych ruchach Prezent stopniowo ujawnia strukturę grafu, tzn. w każdym ruchu może przedstawić pewną liczbę nowych wierzchołków wraz z krawędziami pomiędzy nimi, a także krawędzie pomiędzy nowymi wierzchołkami a wierzchołkami przedstawionymi we wcześniejszych ruchach. W tym samym ruchu Prezent może również odbarwić dowolnie wybrane wierzchołki a następnie wybrać dowolne aktualnie niepokolorowane wierzchołki i zażądać od Malarza ich natychmiastowego pokolorowania. Dla bardziej formalnego opisu przyjmijmy, że $\sigma_1, \dots, \sigma_r$, gdzie $r > 0$, oznaczają r kolejnych ruchów Prezentera. Ponadto przyjmijmy, że G_1 jest grafem pustym oraz, że G_i, G_{i+1} oznaczają grafy znane Malarzowi, odpowiednio, przed oraz po wykonaniu ruchu σ_i , przy czym $i \in \{1, \dots, r\}$. Każdy ruch σ_i , można zapisać jako czwórkę (D_i, U_i, E_i, C_i) , gdzie D_i jest zbiorem wierzchołków odbarwianych, U_i jest zbiorem nowych wierzchołków, E_i jest zbiorem krawędzi uv takich, że $u \in U_i, v \in V(G_i) \cup U_i$, natomiast C_i jest zbiorem wierzchołków, które Malarz musi niezwłocznie pokolorować w odpowiedzi na ruch σ_i . Naturalnie $G_{i+1} = (V(G_i) \cup U_i, E(G_i) \cup E_i)$. Dla U_i dopuszczamy aby był zbiorem pustym, co oznacza, że na dowolnym etapie gry, Prezent i Malarz mogą kontynuować kolorowanie i odbarwianie tego samego grafu. Podobnie, Prezent nie zawsze musi odbarwiać wierzchołki, tzn. dopuszczamy aby zbiór D_i był pusty. W sformułowaniu tym Malarz nie musi znać z góry całego grafu; nie zna liczby ruchów ani kolejności, w której wierzchołki będą prezentowane, kolorowane lub odbarwiane. Kolorowanie offline grafu $G = (V, E)$ jest wówczas grą o jednym ruchu $\sigma_1 = (\emptyset, V, E, V)$, natomiast z kolorowaniem online mamy do czynienia, gdy w każdym ruchu: $D_i = \emptyset$, zbiory U_i i C_i są jednoelementowe oraz $C_i = U_i$. Kolorowanie dynamiczne w opisanym powyżej trybie *wprowadziliśmy* w pracy [A5] – wcześniej, kolorowanie takie nie było rozważane.

Prace [A5] oraz [A6] poświęcone są problemowi zachłannego dynamicznego kolorowania F -wolnego (praca [A5] dotyczy kolorowania właściwego). Odnośnie wyników związanych z obydwoma pracami, należy zaznaczyć, że dla kolorowania właściwego grafów dynamicznych, znane są jedynie pojedyncze prace prezentujące heurystyki i wyniki eksperymentalne (patrz, np. Dutot i in. [28], Ouerfelli i in. [53] oraz Sallinen i in. [57]), oraz dwie prace poświęcone głównie niestrukturalnej analizie kosztów dostosowywania rozwiązań przez algorytmy kolorowania grafów dynamicznych (patrz, np. Barba i in. [6] oraz Bhattacharya i in. [10]).

Wyniki, które prezentujemy w pracach [A5] i [A6] pozwalają na stwierdzenie, że zarówno strategie Prezentera jak i analiza efektywności osiąganego przez algorytm zachłanny podczas kolorowania dynamicznego *różnią się istotnie* od stosowanych wcześniej dla kolorowania w trybie online.

Różnice te zaznaczają się bardzo wyraźnie, np. dla grafów dwudzielnych pełnych $K_{m,n}$, dla których w pracy [A5] *wykazaliśmy*, że dla dowolnego $k > 0$ istnieją liczby naturalne m i n takie, że liczba kolorów użytych przez algorytm zachłanny podczas kolorowania dynamicznego grafu $K_{m,n}$ może być większa od k . W trybie online grafy dwudzielne pełne, zachłannie, kolorowane są optymalnie.

W kontekście różnic pomiędzy trybami, analizowaliśmy również warunki ograniczające Prezentera. *Wykazaliśmy*, że zastosowanie reguły zabraniającej odbarwiania wierzchołka o kolorze k przed odbarwieniem wierzchołków o kolorach mniejszych od k , określa tryb kolorowania dynamicznego (z sekwencyjnym odbarwianiem wierzchołków), w którym liczba kolorów używanych przez algorytm zachłanny w najgorszym przypadku, jest taka sama jak podczas kolorowania w trybie online.

Wspomniane powyżej różnice widoczne są również dla grafów o strukturze drzewiastej, nazywanych przez nas \mathcal{P} -drzewami. Grafy te jako naturalne uogólnienie klasycznych drzew, odegrały ważną rolę w rozwoju teorii kolorowania grafów w trybie online. W połączeniu z odpowiednio dobranymi strategiami, grafy te pozwalają na uzyskanie silnych oszacowań dolnych dla liczby kolorów używanych przez algorytm zachłanny w najgorszym przypadku (patrz, np. Bean [8], Borowiecki [14]). Interesująca struktura i własności \mathcal{P} -drzew inspirowały do badań nad ich minimalnością, których wyniki,

rozszerzone następnie na pozostałe klasy grafów, doprowadziły nas do uzyskania ogólnych rezultatów dotyczących istnienia skończonych charakteryzacji klas $\mathcal{G}(\mathcal{P}, k)$ (patrz Gyárfás i in. [40] dla kolorowania właściwego, oraz praca [A1] dla kolorowania uogólnionego). Grafy będące \mathcal{P} -drzewami stanowiły również elementy składowe gadżetów wykorzystywanych w dowodach trudności obliczeniowej problemów związanych z kolorowaniem zachłannym (patrz, np. Bonnet i in. [12], Zaker [65] oraz praca [A1]).

Praca [A6] oraz wyniki podane w sekcji 3 pracy [A5], lokują się w szeroko pojętym nurcie badań nad własnościami F -drzew (są to \mathcal{P} -drzewa, gdy \mathcal{P} zdefiniowana jest przez zabronienie jednego grafu F). W kontekście tym, w pracy [A6] *wskazaliśmy* na istotną rolę, którą w analizie efektywności algorytmu zachłannego podczas dynamicznego F -wolnego kolorowania F -drzew odgrywa założenie o 2-spójności grafu zabronionego F .

W przypadku, gdy graf F jest 2-spójny, dla każdego $k \geq 1$ *podaliśmy* opis struktury grafów tworzących zbiór minimalnych grafów zabronionych (tzw. F -drzew k -wymuszających) *charakteryzujących klasę* składającą się z F -drzew, dla których podczas dynamicznego kolorowania F -wolnego, algorytm zachłanny używa nie więcej niż k kolorów.

W przypadku, gdy graf zabroniony F nie jest 2-spójny, struktura F -drzew k -wymuszających jest bardziej złożona. Rozważamy wówczas warianty, w których graf zabroniony F jest ścieżką o trzech wierzchołkach (patrz praca [A6]) albo ścieżką o dwóch wierzchołkach (patrz sekcja 3 pracy [A5]).

W obu przypadkach, efektem przeprowadzonej analizy jest podanie *charakteryzacji drzew* (w klasycznym rozumieniu), dla których podczas dynamicznego kolorowania F -wolnego algorytm zachłanny używa nie więcej niż k kolorów.

Z perspektywy wszystkich analizowanych przypadków, ważnym krokiem okazało się wprowadzenie pojęcia k -gałęzi oraz precyzyjne opisanie zależności strukturalnych pomiędzy k -gałęziami a F -drzewami k -wymuszającymi. Uzyskana w ten sposób *unifikacja pojęć* pozwoliła na przeprowadzenie analizy według jednolitego schematu oraz uwypuklenie różnic pomiędzy rozważanymi wariantami.

Wykazaliśmy, że we wszystkich analizowanych przez nas wariantach, dla każdego ustalonego $k \geq 1$, wspomniane powyżej klasy *można scharakteryzować przez skończone zbiory minimalnych grafów zabronionych*. Bezpośrednią konsekwencją istnienia skończonych charakteryzacji jest *wielomianowość problemu* rozstrzygnięcia czy dla danego grafu G należącego do dowolnej ze wspomnianych powyżej klas, liczba kolorów, użytych podczas dynamicznego kolorowania F -wolnego algorytmem zachłannym, może być większa od ustalonego k . Opisane powyżej wyniki rozszerzamy wykazując, że problem ten jest wielomianowy również dla klas składających się z grafów, których szkielet (ang. *backbone*) należy do dowolnej klasy grafów, dla której problem ten jest wielomianowy (patrz sekcja 4 pracy [A6]).

Przeprowadzone przez nas badania wykazują, że struktura minimalnych grafów zabronionych charakteryzujących klasy $\mathcal{G}_d(F, k)$, tzn. klasy składające się ze wszystkich grafów, dla których algorytm zachłanny działający w trybie dynamicznym generuje kolorowania F -wolne używając k kolorów, *bardzo istotnie* różni się od struktury grafów charakteryzujących klasy $\mathcal{G}(\mathcal{P}, k)$. Różnice strukturalne a także dotyczące strategii Prezentera grafu, widoczne są szczególnie wyraźnie, gdy graf zabroniony F nie jest 2-spójny. Na podstawie wyników naszych badań można stwierdzić, że podanie ogólnych charakteryzacji klas $\mathcal{G}_d(F, k)$ jest problemem złożonym; charakteryzacje podane przez nas w pracach [A5] i [A6] ukazują, że trudność ta nie wyklucza jednak możliwości uzyskania szczególnych charakteryzacji dla interesujących, klasycznych wariantów zachłannego kolorowania F -wolnego w trybie dynamicznym.

W pracy [A5] oprócz strategii Prezentera dających oszacowania dolne dla drzew, podaliśmy również strategię dla grafów, których zbiór wierzchołków posiada, tzw. Q -*uporządkowanie*. Wykazaliśmy, że uporządkowanie takie implikuje istnienie strategii prezentacji grafu prowadzącej do pokolorowania, w którym *kolory wszystkich wierzchołków grafu są różne*.

W kontekście tym, wyznaczamy również *grafy ekstremalne*, rozumiane jako grafy o najmniejszej liczbie krawędzi wśród wszystkich grafów, dla których algorytm zachłanny może być zmuszony do użycia innego koloru dla każdego wierzchołka.

Ważną cechą większości strategii, podanych przez nas w pracy [A5], jest ich *niezmiennność względem operacji dodawania krawędzi* do grafu, co oznacza, że zastosowanie strategii do grafu otrzymanego z grafu G przez dodanie dowolnej krawędzi, prowadzi do użycia przez algorytm zachłanny liczby kolorów, która jest nie mniejsza niż dla grafu G . Cecha ta stanowi zaletę, która istotnie różni strategię w analizowanym przez nas trybie dynamicznym od większości strategii w trybie online.

Dla klasy grafów, których zbiory wierzchołków posiadają Q -uporządkowania wykazaliśmy, że pomimo możliwości użycia bardzo dużej liczby kolorów, algorytm zachłanny jest *2-konkurencyjny*.

Ponadto, w pracy [A5], *wykazaliśmy* możliwość ograniczenia współczynnika konkurencyjności algorytmu zachłannego *przez stałą*, dla wielu klas grafów otrzymywanych w wyniku zastosowania ogólnej operacji grafowej, jaką jest *H -złączenie* (ang. *H -join*) dowolnego grafu H rzędu t , z grafami rodziny \mathcal{G} składającej się z t grafów $\{G_1, \dots, G_t\}$ odpowiadających poszczególnym wierzchołkom grafu H .

W szczególności, oszacowania takie podajemy dla klas otrzymywanych w wyniku H -złączenia, gdy H jest ścieżką, cyklem albo grafem pełnym – wskazujemy przy tym na istotne różnice pomiędzy przypadkami, w których H jest ścieżką albo cyklem o małej długości. Poszerzenie kontekstu wyników otrzymujemy parametryzując je takimi cechami grafów z rodziny \mathcal{G} , jak rząd czy konkurencyjność algorytmu zachłannego na poszczególnych grafach rodziny \mathcal{G} . Pozwala to między innymi na podanie oszacowań górnych, gdy operacja H -złączenia stosowana jest rekurencyjnie. W wielu przypadkach możliwe jest również wyliczenie konkretnych wartości stałych będących ograniczeniami konkurencyjności, na przykład, gdy zbiory wierzchołków określonych grafów rodziny \mathcal{G} posiadają wspomniane wcześniej Q -uporządkowania.

4. Podsumowanie

Do najistotniejszych wyników uzyskanych w powyższym monotematycznym cyklu artykułów należą:

- 1) Wprowadzenie pojęcia podziału krytycznego i jego zastosowanie do opisu struktury minimalnych grafów zabronionych charakteryzujących klasy $\mathcal{G}(\mathcal{P}, k)$.
- 2) Rozstrzygnięcie kiedy klasy $\mathcal{G}(\mathcal{P}, k)$ charakteryzowane są przez skończone zbiory grafów zabronionych.
- 3) Przeprowadzenie analizy złożoności obliczeniowej problemu \mathcal{P} -kolorowania algorytmem zachłannym, w szczególności:
 - a) wskazanie przypadków wielomianowych wynikających z istnienia skończonych charakteryzacji wspomnianych w punkcie 2),
 - b) wykazanie NP-zupełności, problemu rozstrzygnięcia, czy dla danego grafu G i liczby całkowitej k zachodzi $\Gamma_{\mathcal{P}}(G) \geq k$, gdy \mathcal{P} jest ustaloną klasą grafów K_p -wolnych, $p \geq 3$.
 - c) wykazanie coNP-zupełności problemu rozstrzygnięcia, czy dla danego grafu G oraz nieujemnej liczby całkowitej t zachodzi $\Gamma_{\mathcal{P}}(G) - \chi_{\mathcal{P}}(G) \leq t$, gdy \mathcal{P} jest ustaloną klasą grafów K_p -wolnych, $p \geq 3$.
- 4) Opracowanie podstaw ogólnej metody projektowania rozszerzeń klas grafów wraz z działającymi na nich nowymi wielomianowymi algorytmami przybliżonymi.
- 5) Wskazanie możliwości zastosowania metody wspomnianej w punkcie 4) w wielu trybach obliczeń, oraz użycia jej do projektowania rozszerzeń klas grafów, podczas którego kontrolowane są ograniczenia górne różnych niezmienników grafowych, np. związanych z χ -ograniczonością (podanie w autoreferacie przykładu rozszerzenia szeroko stosowanej klasy grafów P_5 -wolnych).

- 6) Wprowadzenie pojęcia krotki schodkowej i jej zastosowanie do zdefiniowania funkcji potencjału p_G , q_G i ϕ_G grafu G , oraz związanych z nimi niezmienników $Q(G)$ oraz $\Phi_{\mathcal{P}}(G)$.
- 7) Zdefiniowanie nowych rodzin algorytmów zachłannego wyznaczania zbiorów niezależnych, oraz wykazanie ogólnych ograniczeń dolnych typu Caro-Wei dla efektywności algorytmów należących do tych rodzin.
- 8) Zastosowanie potencjału schodkowego grafu oraz jego uogólnienia do wzmocnienia oszacowań liczby chromatycznej, liczby niezależności oraz uogólnionej liczby Grundy grafu, podanych wcześniej przez Brooksa, Stacho, Zakera oraz Caro i Wei, będących równocześnie oszacowaniami efektywności algorytmów zachłannych należących do zdefiniowanych przez nas rodzin.
- 9) Przełamanie prymatu oszacowań wyrażanych przez stopnie wierzchołków, wzmocnienie aspektu jakościowego oszacowań, umożliwienie formułowania ograniczeń, np. dla grafów o ograniczonym potencjale zamiast dla grafów o ograniczonym stopniu (grafy o ograniczonym potencjale nie muszą mieć ograniczonego stopnia).
- 10) Zdefiniowanie nowej nietrywialnej klasy grafów optymalnie kolorowalnych algorytmem zachłannym (grafy G spełniające $\chi(G) = Q(G) + 1$).
- 11) Sformułowanie szeregu hipotez, np. wzmocnionej wersji hipotezy Reeda, hipotezy o prawdziwości oszacowania typu Caro-Wei z funkcja potencjału γ_G , oraz ich rozstrzygnięcie w szczególnych przypadkach.
- 12) Wprowadzenie trybu kolorowania dynamicznego, w którym procesy ewolucji rozwiązań oraz struktury grafu są niezależne, co pozwala na elastyczne modelowanie systemów o różnych typach dynamiki, przejawiającej się nie tylko jako zmiany strukturalne.
- 13) Wskazanie istotnych różnic w strukturze grafów charakteryzujących klasy $\mathcal{G}(\mathcal{P}, k)$ i $\mathcal{G}_d(F, k)$, jak również w strategiach prezentacji grafów obu klas w trybie online oraz trybie dynamicznym.
- 14) Podanie własności strukturalnych prowadzących do unifikacji pojęć, pozwalającej na opisanie struktury minimalnych grafów zabronionych charakteryzujących klasy grafów o strukturze drzewiastej, dla których algorytm zachłanny, w trybie dynamicznym, daje pokolorowania F -wolne co najwyżej k -kolorami, gdy F jest grafem 2-spójnym albo ścieżką o długości 2 (kolorowanie właściwe) bądź 3 (subcoloring).
- 15) Wykazanie stałych ograniczeń górnych współczynnika konkurencyjności algorytmu zachłannego dla wielu klas grafów, m.in. otrzymywanych w wyniku H -złączenia oraz posiadających Q -uporządkowania.

Bibliografia

- [1] D. Achlioptas, *The complexity of G -free colourability*, Discrete Mathematics 165/166 (1997), 21–30.
- [2] M.O. Albertson, R.E. Jamison, S.T. Hedetniemi, S.C. Locke, *The subchromatic number of a graph*, Discrete Mathematics 74 (1989), 33–49.
- [3] N. Alon, J.H. Spencer, *The probabilistic method*, Wiley, New York, 1992.
- [4] D.A. Bader, H. Meyerhenke, P. Sanders, D. Wagner (eds), *Graph partitioning and Graph Clustering*, 10th DIMACS Implementation Challenge Workshop, Contemporary Mathematics 588, American Mathematical Society, 2012.
- [5] A. Bar-Noy, A. Mayer, B. Schieber, M. Sudan, *Guaranteeing fair service to persistent dependent tasks*, SIAM Journal on Computing 27 (1998), 1168–1189.
- [6] L. Barba, J. Cardinal, M. Korman, S. Langerman, A. van Renssen, M. Roeloffzen, S. Verdonschot, *Dynamic Graph Coloring*, Proc. 15th Workshop on Algorithms and Data Structures (WADS 2017), 97–108.

- [7] S. Baswana, M. Gupta, S. Sen, *Fully dynamic maximal matching in $O(\log n)$ update time*, SIAM Journal on Computing 44 (2015), 88–113.
- [8] D.R. Bean, *Effective coloration*, J. Symbolic Logic 4 (1976), 469–480.
- [9] J.-C. Bermond, F. Havet, F. Huc, C. Linhares-Sales, *Improper coloring of weighted grid and hexagonal graphs*, Discrete Math. Algorithm. Appl. 2 (2010), 395–412.
- [10] S. Bhattacharya, D. Chakrabarty, M. Henzinger, D. Nanongkai, *Dynamic Algorithms for Graph Coloring*, to appear in Proc. 29th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2018).
- [11] S. Bhattacharya, M. Henzinger, G.F. Italiano, *Deterministic Fully Dynamic Data Structures for Vertex Cover and Matching*, Proc. 26th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2015), 785–804.
- [12] É. Bonnet, F. Foucaud, E.J. Kim, F. Sikora, *Complexity of Grundy Coloring and its Variants* Proc. Computing and Combinatorics (COCOON 2015), Lecture Notes in Computer Science 9198 (2015), 109–120.
- [13] P. Borowiecki, On-line coloring of graphs, w: M. Kubale (red.), Graph Colorings, Contemporary Mathematics 352, American Mathematical Society (2004), 21–33 (patrz również [M1]).
- [14] P. Borowiecki, *On-line \mathcal{P} -coloring of graphs*, Discussiones Mathematicae Graph Theory 26(3) (2006), 389–401 (patrz również [C7]).
- [15] P. Borowiecki, *On-line partitioning for on-line scheduling with resource conflicts*, Proc. 7th International Conference on Parallel Processing and Applied Mathematics (PPAM 2007), Lecture Notes in Computer Science 4967 (2008), 981–990 (patrz również [C5]).
- [16] A. Brandstädt, Van Bang Le, J.P. Spinrad, Graph Classes: A Survey, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 1987 (patrz również <http://www.graphclasses.org>).
- [17] I. Broere, C.M. Mynhardt, *Generalized colorings of graphs*, Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science, (Kalamazoo, 1984) Wiley, New York, 1985.
- [18] H. Broersma, F. Fomin, J. Kratochvíl, G.J. Woeginger, *Planar graph coloring avoiding monochromatic subgraphs: trees and paths make it difficult*, Algorithmica 44 (2006), 343–361.
- [19] R.L. Brooks, *On colouring the nodes of a network*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 37 (1941), 194–197.
- [20] Y. Caro, *New results on the independence number*, Technical Report, Tel-Aviv University, 1979.
- [21] G. Chartrand, D. Geller, S. Hedetniemi, *A generalization of chromatic number*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 64 (1968), 265–271.
- [22] C.A. Christen, S.M. Selkow, *Some perfect coloring properties of graphs*, Journal of Combinatorial Theory Ser. B 27 (1979), 49–59.
- [23] M. Chudnovsky, J. Godebeur, O. Schaudt, M. Zhong, *Obstructions for three-coloring graphs with one forbidden induced subgraph*, Proc. 27th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2016), 1774–1783.
- [24] V. Chvátal, C. McDiarmid, *Small transversals in hypergraphs*, Combinatorica 12 (1992), 19–26.
- [25] L. Cowen, R.H. Cowen, D.R. Woodall, *Defective colorings of graphs in surfaces: partitions into subgraphs of bounded valency*, Journal of Graph Theory 10 (1986), 187–195.
- [26] D.W. Cranston, L. Rabern, *Brooks’ theorem and beyond*, Journal of Graph Theory 80(3) (2015), 199–225.
- [27] M. Drozdowski, *Scheduling multiprocessor tasks - an overview*, European Journal of Operational Research 94 (1996), 215–230.
- [28] A. Dutot, F. Guinand, D. Olivier, Y. Pigné, *On the decentralized dynamic graph-coloring problem*, Proc. Workshop Complex Systems and Self-Organization Modelling, satellite workshop within European Simulation and Modelling Conference (ESM’2007), 259–261.
- [29] P. Erdős, R.J. Wilson, *On the chromatic index of almost all graphs*, Journal of Combinatorial Theory Ser. B 23 (1977), 255–257.
- [30] J. Fiala, K. Jansen, V.B. Le, E. Seidel, Graph subcolorings: complexity and algorithms, SIAM Journal on Discrete Mathematics 16 (2003), 636–650.

- [31] J.L. Fouquet, V. Giakoumakis, F. Maire, H. Thuillier, *On graphs without P_5 and $\overline{P_5}$* , Discrete Mathematics 146 (1995), 33–44.
- [32] M.R. Garey, D.S. Johnson, L. Stockmeyer, *Some simplified NP-complete graph problems*, Theoretical Computer Science 1 (1976), 237–267.
- [33] J. Gimbel, C. Hartman, *Subcolorings and the subchromatic number of a graph*, Discrete Mathematics 272 (2003), 139–154.
- [34] J. Gimbel, J. Nešetřil, *On partitions of graphs into cographs*, Discrete Mathematics 310 (2010), 3437–3445.
- [35] J. Godgebeur, O. Schaudt, *Exhaustive generation of k -critical \mathcal{H} -free graphs*, Proc. Graph-Theoretic Concepts in Computer Science - 42nd International Workshop (WG 2016), 109–120.
- [36] J.R. Griggs, *Lower bounds on the independence number in terms of the degrees*, Journal of Combinatorial Theory Ser. B 34 (1983), 22–39.
- [37] P.A. Golovach, M. Johnson, D. Paulusma, J. Song, *A survey on the complexity of coloring graphs with forbidden subgraphs*, Journal of Graph Theory 84 (2017), 331–363.
- [38] N. Goyal, S. Vishwanathan, *NP-completeness of undirected Grundy numberings and related problems*, unpublished manuscript, Bombay, 1998.
- [39] A. Gyárfás, *Problems from the world surrounding perfect graphs*, Zastosowania Matematyki 19 (1987), 413–431.
- [40] A. Gyárfás, Z. Király, J. Lehel, *On-line 3-chromatic graphs II. Critical graphs*, Discrete Mathematics 177 (1997), 99–122.
- [41] A. Gyárfás, J. Lehel, *On-line and First Fit colorings of graphs*, Journal of Graph Theory 12 (1988), 217–227.
- [42] F. Havet, R.J. Kang, J.-S. Sereni, *Improper coloring of unit disk graphs*, Networks 54 (2009), 150–164.
- [43] S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, T. Beyer, *A linear algorithm for the Grundy (coloring) number of a tree*, Congressus Numerantium 36 (1982), 351–363.
- [44] C.T. Hoàng, V.B. Le, *P_4 -free colorings and P_4 -bipartite graphs*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 4 (2001), 109–122.
- [45] C.T. Hoàng, B. Moore, D. Recoskie, J. Sawada, M. Vatshelle, *Constructions of k -critical P_5 -free graphs*, Discrete Applied Mathematics 182 (2015), 91–98.
- [46] S. Irani, V. Leung, *Scheduling with conflicts on bipartite and interval graphs*, Journal of Scheduling 6 (2003), 287–307.
- [47] G. Italiano, *Fully Dynamic All Pairs Shortest Paths*, w: M.Y. Kao (red.) Encyclopedia of Algorithms, Springer, Boston (2008).
- [48] T.R. Jensen, B. Toft, Graph coloring problems, John Wiley and Sons, 1995.
- [49] H.A. Kierstead, *Coloring graphs on-line*, w: A. Fiat, G.J. Woeginger (red.), Online Algorithms - The State of the Art, Lecture Notes in Computer Science 1442 (1998), 281–305.
- [50] H.A. Kierstead, S.G. Penrice, W.T. Trotter, *On-line and First-Fit coloring of graphs that do not induce P_5* , SIAM Journal on Discrete Mathematics 8(4) (1995), 485–498.
- [51] M. Kubale (ed.), Graph Colorings, Contemporary Mathematics 352, American Mathematical Society, 2004.
- [52] L. Lovász, *Covering and coloring of hypergraphs*, Proc. 4th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Utilias Mathematica (1973), 3–12.
- [53] L. Ouerfelli, H. Bouziri, *Greedy algorithms for dynamic graph coloring*, Proc. International Conference on Communications, Computing and Control Applications (CCCA 2011), IEEE Computer Society, 2011, 1–5.
- [54] K.S. Poh, *On the linear vertex-arboricity of a planar graph*, Journal of Graph Theory, 14 (1990), 73–75.
- [55] D. Rautenbach, *Independence in Graphs - A Medley of Popular Tunes*, Mathematika Contemporânea 42 (2014), 87–104 (<https://mc.sbm.org.br/volumes/volume-42/>).

- [56] B.A. Reed, ω , Δ and χ , *Journal of Graph Theory* 27(4) (1989), 177–212.
- [57] S. Sallinen, K. Iwabuchi, S. Poudel, M. Gokhale, M. Ripeanu, R.A. Pearce, *Graph colouring as a challenge problem for dynamic graph processing on distributed systems*, Proc. International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis (SC 2016), IEEE Computer Society, 2016, 347–358.
- [58] I. Schiermeyer, *Chromatic number of P_5 -free graphs: Reed's conjecture*, *Discrete Mathematics* 339 (2016), 1940–1943.
- [59] S.M. Selkow, *A probabilistic lower bound on the independence number of graphs*, *Discrete Mathematics* 132 (1994), 363–365.
- [60] L. Stacho, *New upper bounds for the chromatic number of a graph*, *Journal of Graph Theory* 36 (2001), 117–120.
- [61] G. Szekeres, S.H. Wilf, *An inequality for the chromatic number of a graph*, *Journal of Combinatorial Theory* 4 (1968), 1–3.
- [62] T. Thiele, *A lower bound on the independence number of arbitrary hypergraphs*, *Journal of Graph Theory* 30 (1999), 213–221.
- [63] J. Wang, *On point-linear arboricity of planar graphs*, *Discrete Mathematics* 72 (1988), 381–384.
- [64] V.K. Wei, *A lower bound on the stability number of a simple graph*, Tech. Memorandum No. 81-11217-9, Bell Lab., 1981.
- [65] M. Zaker, *Results on the Grundy chromatic number of graphs*, *Discrete Mathematics* 306 (2006), 3166–3173.
- [66] M. Zaker, *New bounds for the chromatic number of graphs*, *Journal of Graph Theory* 58 (2008), 110–122.

V OMÓWIENIE POZOSTAŁYCH OSIĄGNIĘĆ NAUKOWO-BADAWCZYCH (NIEWCHODZĄCYCH W SKŁAD OSIĄGNIĘCIA WSKAZANEGO W PUNKCIE IV).

A) Lista artykułów zawierających pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze.

Artykuły w czasopismach znajdujących się z bazy Journal Citation Reports:

- [B1] P. Borowiecki, M. Gentner, Ch. Löwenstein, D. Rautenbach, *Independence in uniform linear triangle-free hypergraphs*, *Discrete Mathematics* 339 (2016), 1878–1883.
- [B2] P. Borowiecki, D. Dereniowski, Ł. Kuszner, *Distributed graph searching with a sense of direction*, *Distributed Computing* 28(3) (2015), 155–170.
- [B3] G. Bacsó, P. Borowiecki, M. Hujter, Zs. Tuza, *Minimum order of graphs with given coloring parameters*, *Discrete Mathematics* 338(4) (2015), 621–632.
- [B4] P. Borowiecki, D. Dereniowski, P. Prałat, *Brushing with additional cleaning restrictions*, *Theoretical Computer Science* 557 (2014), 76–86.
- [B5] P. Borowiecki, D. Dereniowski, *On-line ranking of split graphs*, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* 15(2) (2013), 195–214.
- [B6] P. Borowiecki, M. Borowiecki, E. Sidorowicz, Z. Skupień, *On extremal sizes of locally k -tree graphs*, *Czechoslovak Mathematical Journal* 60(2) (2010), 571–587.

Rozdziały w książkach, monografie:

- [M1] P. Borowiecki, *On-line coloring of graphs*, w: M. Kubale (red.), *Graph Colorings*, Contemporary Mathematics 352, American Mathematical Society, 2004, 21–33.

- [M2] P. Borowiecki, Kolorowanie w trybie on-line, w: M. Kubale (red.), *Optymalizacja dyskretna. Modele i metody kolorowania grafów*, Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Warszawa, 2002, 53–71.
- [M3] P. Borowiecki, Kolorowanie grafów w trybie on-line, Rozprawa doktorska (2000), Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki, Politechnika Gdańska.

Artykuły w innych czasopismach oraz recenzowanych materiałach konferencyjnych:

- [C1] P. Borowiecki, *On computational aspects of greedy partitioning of graphs*, Proc. 11th International Workshop on Frontiers in Algorithmics (FAW 2017), Lecture Notes in Computer Science 10336 (2017), 34–46.
- [C2] P. Borowiecki, S. Das, D. Dereniowski, Ł. Kuszner, *Distributed evacuation in graphs with multiple exits*, Proc. 23rd International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity (SIROCCO 2016), Lecture Notes in Computer Science 9988 (2016), 228–241.
- [C3] P. Borowiecki, K. Budajova, S. Jendrol', S. Krajčí, *Parity vertex colourings of graphs*, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 31(1) (2011), 183–195.
- [C4] P. Borowiecki, *Algorithmic bounds on the chromatic number of a graph*, Proc. 1st IEEE International Conference on Information Technology, Gdańsk, 2008, 285–288.
- [C5] P. Borowiecki, *On-line partitioning for on-line scheduling with resource conflicts*, Proc. 7th International Conference on Parallel Processing and Applied Mathematics (PPAM 2007), Lecture Notes in Computer Science 4967 (2008), 981–990.
- [C6] P. Borowiecki, *Nowe oszacowania górne dla liczby chromatycznej grafu i ich zastosowania algorytmiczne*, *Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Ser. Technologie Informacyjne* 13 (2007), 435–442.
- [C7] P. Borowiecki, *On-line \mathcal{P} -coloring of graphs*, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 26(3) (2006), 389–401.
- [C8] P. Borowiecki, E. Sidorowicz, *Efektywność algorytmów dynamicznego kolorowania grafów – zastosowania w sieciach optycznych WDM*, *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Ser. Automatyka* 144 (2006), 135–142.
- [C9] P. Borowiecki, *Efektywność algorytmów kolorowania grafów w trybie on-line (II)*, *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Ser. Automatyka* 136 (2002), 11–20.
- [C10] P. Borowiecki, M. Kubale, *A survey of hard-to-color graphs for off-line and on-line model of vertex coloring*, *Journal of Applied Computer Science* 9(2) (2001), 7–17.
- [C11] P. Borowiecki, *Efektywność algorytmów kolorowania grafów w trybie on-line*, *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Ser. Automatyka* 131 (2000), 12–23.
- [C12] P. Borowiecki, *Kolorowanie grafów w trybie on-line*, *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Ser. Automatyka* 123 (1998), 65–75.
- [C13] P. Borowiecki, J. Ivančo, *\mathcal{P} -bipartitions of minor hereditary properties*, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 17(1) (1997), 89–93.
- [C14] P. Borowiecki, M. Hałuszczak, *Partitions of some planar graphs into two linear forests*, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 17(1) (1997), 95–102.
- [C15] P. Borowiecki, *\mathcal{P} -bipartitions of graphs*, *Vishwa International Journal of Graph Theory* 2(2) (1996), 109–116

B) Omówienie wyników zawartych w artykułach wymienionych w punkcie A)

1. Wprowadzenie

Oprócz wyników zawartych w tworzącym monotematyczny cykl artykułów [A1]–[A6], zainteresowania naukowe kandydata dotyczą zagadnień, które można ująć jako następujące wątki tematyczne:

- zbiory niezależne w hipergrafach (praca [B1]),
- kolorowanie właściwe z ograniczeniami dla kolorów na ścieżkach (prace [B5], [C3]),
- własności lokalne i struktury ekstremalne (prace [B3], [B6]),
- algorytmy agentowe przeszukiwania, przeglądania i ewakuacji w grafach (prace [B2], [B4] i [C2]).

Niektóre prace, wśród prac publikowanych przed doktoratem, nie zostały wykorzystane w rozprawie doktorskiej:

- badania przed doktoratem – wyniki uwzględnione w rozprawie doktorskiej [M3] (ujęte w pracach [A5] (s. 124–126), [C5], [C7], [C9]–[C12] oraz [M1] i [M2]),
- badania przed doktoratem – wyniki nieuwzględnione w rozprawie doktorskiej (prace [C13], [C14] i [C15]).

Wśród prac wymienionych w trzech pierwszych wątkach tematycznych, znajdują się prace [B1], [B3] i [B5], które są silnie związane z tematyką monotematycznego cyklu artykułów tworzących główne osiągnięcie kandydata. Prace te są również ściśle związane z *algorytmami zachłannymi*, jednak włączenie ich do cyklu monotematycznego, wymagałoby uwzględnienia: hipergrafów [B1], analizy grafów ekstremalnych posiadających nieco odmienny charakter niż minimalne grafy zabronione używane do charakteryzowania klas grafów [B3], uwzględnienia mniej klasycznego modelu kolorowania jakim jest kolorowanie uporządkowane [B5].

W *subiektywnej ocenie kandydata*, włączenie powyższych prac do cyklu monotematycznego mogłoby spowodować nadmierne poszerzenie jego tematyki.

Dla ułatwienia, bibliografia dotycząca poszczególnych wątków tematycznych, prezentowana jest bezpośrednio pod opisem wyników. Bibliografię poprzedzamy opisem potencjalnych zastosowań.

2. Zbiory niezależne w hipergrafach

W pracy [9] Shaerer podał dolne oszacowanie liczby niezależności grafu, które podobnie jak wspomniane w punkcie 3.2 sekcji IV oszacowanie Caro i Wei, na stałe wpisało się w kanon klasyki. Oszacowanie Shaerera dotyczy grafów bez trójkątów i sformułowane jest następująco

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} f(d_G(v)),$$

gdzie f jest funkcją taką, że $f(0) = 1$ i $f(d) = (1 + (d^2 - d)f(d - 1))/(d^2 + 1)$, gdy $d \geq 1$.

Głównym celem powstania pracy [B1] była adaptacja idei przedstawionych w pracy Shaerera, zmierzająca do uzyskania oszacowania o podobnym, lecz ogólniejszym charakterze, tzn. odnoszącego się do hipergrafów. Podobne próby podejmowane były również wcześniej, np. przez Li i Zanga [7], którzy podali oszacowanie dla hipergrafów jednorodnych podwójnie liniowych (z pewnymi ograniczeniami na maksymalne stopnie w podhipergrafach) oraz Chishti i in. [4], których oszacowanie dotyczy hipergrafów liniowych jednorodnych bez trójkątów. Jak wykazała przeprowadzona przez nas analiza, w wielu przypadkach, oszacowania podane w pracach [4, 7] okazują się gorsze nawet od oszacowania podanego wcześniej przez Caro i Tuzę [3], które ponadto, zachodzi dla wszystkich hipergrafów jednorodnych. W pracy [B1] wykazaliśmy, że dla każdego liniowego r -jednorodnego hipergrafu \mathcal{H} bez trójkątów

$$\alpha(\mathcal{H}) \geq \sum_{v \in V(\mathcal{H})} f_r(d_{\mathcal{H}}(v)),$$

gdzie $f_r(0) = 1$, oraz $f_r(d) = (1 + ((r - 1)d^2 - d)f_r(d - 1))/((r - 1)d^2 + 1)$, gdy $d \geq 1$.

Uzyskane przez nas oszacowanie, dla $r = 2$ implikuje wynik Shaerera dla grafów. Oszacowanie nasze jest lepsze od oszacowań podanych we wspomnianych wcześniej pracach [3, 4, 7]. Istotną zaletą funkcji f_r jest również możliwość wyznaczenia konkretnej wartości oszacowania dla każdego danego hipergrafu \mathcal{H} , w przeciwieństwie do znanych oszacowań podanych, np. przez Ajtai i in. [2], Dukea i in. [5] oraz Dutę i in. [6], które mają charakter asymptotyczny, a w konsekwencji ograniczoną przydatność w wyznaczaniu wartości oszacowań dla konkretnych hipergrafów.

◇

Potencjalne zastosowania. Wśród potencjalnych zastosowań zbiorów niezależnych w hipergrafach znajdujemy, np. problemy związane z routingiem w sieciach (Alon i in. [1]). Ciekawym przeglądem algorytmów wraz z aplikacjami jest dysertacja, której autorką jest Losievskaia [8].

- [1] N. Alon, U. Arad, Y. Azar, *Independent sets in hypergraphs with applications to routing via fixed paths*, Proc. 2nd International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization Problems (APPROX 1999), Lecture Notes in Computer Science 1671 (1999), 16–27.
- [2] M. Ajtai, J. Komlos, J. Spencer, E. Szemerédi, *Extremal uncrowded hypergraphs*, Journal of Combinatorial Theory Ser. A 32 (1982), 321–335.
- [3] Y. Caro, Zs. Tuza, *Improved lower bounds on k -independence*, Journal of Graph Theory 15 (1991), 99–107.
- [4] T.A. Chishti, G. Zhou, S. Pirzada, A. Iványi, *On vertex independence number of uniform hypergraphs*, Acta Univ. Sapientiae, Informatica 6 (2014), 132–158.
- [5] R. Duke, H. Lefmann, V. Rödl, *On uncrowded hypergraphs*, Random Structures Algorithms 6 (1995), 209–212.
- [6] K. Dutta, D. Mubayi, C.R. Subramanian, *New lower bounds for the independence number of sparse graphs and hypergraphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics 26 (2012), 1134–1147.
- [7] Y. Li, W. Zang, *Differential methods for finding independent sets in hypergraphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics 20 (2006), 96–104.
- [8] E. Losievskaia, *Approximation algorithms for independent set problems on hypergraphs*, PhD Thesis, School of Computer Science, Reykjavík University, 2009.
- [9] J.B. Shaerer, *A note on the independence number of triangle-free graphs. II*, Journal of Combinatorial Theory Ser. B 53 (1991), 300–307.

3. Kolorowanie właściwe z ograniczeniami dla kolorów na ścieżkach

Znanych jest wiele modyfikacji klasycznego problemu kolorowania grafów polegających na przyjęciu dodatkowych wymagań dotyczących kolorów występujących na ścieżkach pokolorowanego grafu. Wśród najbardziej popularnych modyfikacji można wymienić:

- kolorowanie uporządkowane [B5], [C3],
- kolorowanie parzystościowe [C3],
- kolorowanie bezkonfliktowe.

Pokolorowaniem uporządkowanym grafu (ang. *ranking*) nazywamy pokolorowanie właściwe φ , w którym na każdej ścieżce łączącej dowolne dwa wierzchołki u i v takie, że $\varphi(u) = \varphi(v)$, występuje pewien wierzchołek o kolorze większym niż $\varphi(u)$. Pokolorowanie właściwe grafu nazywane jest pokolorowaniem parzystościowym (ang. *parity coloring*), jeżeli wśród wierzchołków pokolorowanego grafu, na każdej ścieżce znajduje się nieparzysta liczba wierzchołków pewnego koloru. Jeżeli na każdej ścieżce pewien kolor występuje dokładnie jeden raz, to pokolorowanie takie nazywamy

bezkonfliktowym (ang. *conflict-free coloring*). Każde pokolorowanie uporządkowane grafu jest pokolorowaniem parzystościowym a pokolorowanie parzystościowe zawsze jest pokolorowaniem bezkonfliktowym. Dla modeli z ograniczeniami na ścieżkach możemy mówić również o wariancie, w którym kolorowane są krawędzie (definicje są analogiczne jak dla kolorowania wierzchołków). We wszystkich wariantach, problem optymalizacyjny polega na wyznaczeniu takiej funkcji φ , która minimalizuje największy spośród użytych kolorów. Maksimum takiej funkcji w zależności od wariantu nazywamy (*uporządkowaną/parzystościową/bezkonfliktową*) liczbą chromatyczną grafu G . W pracach [B5] i [C3] kolorowaniu podlegają wierzchołki grafu.



W pracy [B5] rozważamy kolorowanie uporządkowane w trybie on-line. Problem ten po raz pierwszy podjęli Schiermeyer, Tuza i Voigt w pracy [9]. Scharakteryzowali oni grafy, których uporządkowana liczba on-line chromatyczna równa jest 3 (uporządkowaną liczbą on-line chromatyczną grafu G jest najmniejsza liczba k , dla której istnieje algorytm on-line, który do pokolorowania grafu G potrzebuje nie więcej niż k kolorów) oraz podali górne oszacowanie dla liczby kolorów używanych przez algorytm zachłanny. Oszacowania dla uporządkowanej liczby on-line chromatycznej ścieżek i cykli wyznaczyli Bruoth i Horniak [1, 2] natomiast wyniki dla drzew znajdujemy w pracy McDonaalda [8]. Jak pokazuje lektura powyższych prac, nawet dla stosunkowo prostych klas grafów, analiza problemu kolorowania uporządkowanego w trybie on-line jest złożona.

Analizując problem kolorowania uporządkowanego w trybie on-line dla split grafów, w pracy [B5] podaliśmy konstrukcję odpowiednich grafów i deterministyczną strategię prezentacji przez Prezentera, które dla dowolnej stałej $c > 0$, każdy algorytm on-line, prowadzą do użycia koloru nie mniejszego od $c \cdot \chi_r(G)$, gdzie $\chi_r(G)$ oznacza uporządkowaną liczbę chromatyczną grafu G .

Wynik ten skłonił nas do podjęcia prac w kierunku wpisującym się w intensywnie rozwijający się nurt badań nad algorytmami on-line określanymi jako algorytmy z dodatkową informacją (ang. *algorithms with advice*). Zasadniczym celem badań w tym nurcie jest ustalenie jak wiele dodatkowych informacji (ang. *advice bits*) należy dostarczyć algorytmowi, aby zagwarantować osiągnięcie określonego współczynnika konkurencyjności, a nawet wyznaczenie rozwiązania optymalnego (patrz, np. Dobrev i in. [4]). Dobór odpowiedniej “podpowiedzi” nie jest oczywisty i sam w sobie stanowi nietrywialny problem badawczy.

W pracy [B5] przyjmując, że algorytm ma z góry daną liczbę klikową split grafu, wykazaliśmy, że dla żadnego $\varepsilon > 0$ nie istnieje $(2 - \varepsilon)$ -konkurencyjny algorytm kolorowania uporządkowanego on-line.

Kolejnym krokiem było *podanie 2-konkurencyjnego zachłannego algorytmu z dodatkową informacją w postaci liczby klikowej grafu*.

Analiza efektywności naszego algorytmu bazuje na obserwacji, że wśród potencjalnie nieskończonej liczby ruchów Prezentera grafu, można wyróżnić *skończoną liczbę typów* ruchów. Pozwala to na odwzorowanie dowolnego ciągu ruchów Prezentera na marszrutę w digrafie zmian stanów (ang. *state transition digraph*). Dzięki odpowiedniemu doborowi typów ruchów digraf ten zdefiniowany został w taki sposób, aby jego marszruty odzwierciedlały ewolucję struktury split grafu, umożliwiając równocześnie analizę zmian wartości współczynnika konkurencyjności dla ciągów przejść pomiędzy poszczególnymi stanami. Kluczowym elementem analizy było wyodrębnienie marszrut, dla których przejścia pomiędzy stanami nie wpływają na wartość współczynnika konkurencyjności oraz zaobserwowanie acykliczności digrafu otrzymanego przez pominięcie łuków odpowiadających tzw. wygrywającym ruchom algorytmu.

Należy podkreślić, że klasyfikacja ruchów Prezentera prowadząca do definicji digrafu zmian stanów, jak również leżąca u jej podstaw koncepcja trójpodziału zbioru wierzchołków split grafu są niezależne od użytego algorytmu kolorowania. Mają więc *charakter uniwersalny, co pozwala na zastosowanie do analizy algorytmów on-line dla innych problemów kombinatorycznych* na split grafach.



Pierwsze wyniki dla kolorowania parzystościowego zostały podane przez Bunde i in. [3] w kontekście problemu zanurzania grafów w hiperkostkach stanowiących jedną z najefektywniejszych architektur dla obliczeń równoległych. Oba problemy są ściśle powiązane, przy czym korzenie problemu zanurzania sięgają badań nad możliwością symulowania jednej architektury obliczeń równoległych przez drugą.

W pracy [C3] zapoczątkowaliśmy badania nad wariantem wierzchołkowym kolorowania parzystościowego. W wariantcie tym opisaliśmy szereg fundamentalnych zależności dla liczby parzystościowej $\chi_p(G)$, uwzględniając podstawowe operacje grafowe oraz niezmienniki, takie jak liczba chromatyczna $\chi(G)$ czy liczba niezależności grafu $\alpha(G)$. Podaliśmy także dokładne wartości parzystościowej liczby chromatycznej dla grafów k -dzielnych pełnych, ścieżek i wybranych hiperkostek, oraz oszacowania górne i dolne dla drzew.

Analizując związek pomiędzy liczbą parzystościową a liczbą uporządkowaną wykazaliśmy ogólną zależność $\chi(G) \leq \chi_p(G) \leq \chi_r(G)$, zachodzącą dla każdego grafu G , oraz równość $\chi_p(G) = \chi_r(G)$ dla grafów P_4 -wolnych. W kontekście tym opisaliśmy również własności grafów minimalnych (krytycznych) ze względu na liczbę uporządkowaną, wzmacniając rezultaty podane wcześniej przez Katchalskiego i in. [6].



Potencjalne zastosowania. Wśród potencjalnych zastosowań modeli kolorowania prezentowanych w tym wątku tematycznym, oprócz wspomnianego wcześniej symulowania architektur obliczeń równoległych, warto wskazać pracę Evena i in. [5], w której badania nad kolorowaniem bezkonfliktowym motywowane są możliwością modelowania przydziału częstotliwości w sieciach komórkowych, a także pracę Liu [7] ukazującą związek kolorowania uporządkowanego z równoległą faktoryzacją macierzy metodą Choleskiego. Ponadto, kolorowanie uporządkowane znajduje zastosowania w automatyzacji równoległego montażu, jak i w optymalizacji równoległego przetwarzania zapytań w systemach relacyjnych baz danych.

- [1] E. Bruoth, M. Horňiak, *On-line ranking number for cycles and paths*, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 19 (1999), 175–197.
- [2] E. Bruoth, M. Horňiak, *A lower bound for on-line ranking number of a path*, *Discrete Mathematics* 307 (2007), 1347–1355.
- [3] D.P. Bunde, K. Milans, D.B. West, H. Wu, *Parity and strong parity edge-colorings of graphs*, *Congressus Numerantium* 187 (2007), 193–213.
- [4] S. Dobrev, R. Kráľovič, D. Pardubská, *How much information about the future is needed?*, *Proc. 34th Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science (SOFSEM '08)*, *Lecture Notes in Computer Science* 4910 (2008), 247–258.
- [5] G. Even, Z. Lotker, D. Ron, S. Smorodinsky, *Conflict-free colorings of simple geometric regions with applications to frequency assignment in cellular networks*, *SIAM Journal on Computing* 33 (2003), 94–136.
- [6] M. Katchalski, W. McCuaig, S. Seager, *Ordered colourings*, *Discrete Mathematics* 142 (1995), 141–154.
- [7] J.W.H. Liu, *The role of elimination trees in sparse factorization*, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 11 (1990), 134–172.
- [8] D.C. McDonald, *On-line vertex ranking of trees*, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 29(1) (2015), 145–156.
- [9] I. Schiermeyer, Zs. Tuza, M. Voigt, *On-line rankings of graphs*, *Discrete Mathematics* 212 (2000), 141–147.

4. Wybrane własności grafów jako instancji problemów optymalizacyjnych

Omawiane w tym wątku tematycznym prace [B3] i [B6] poświęcone są pewnym grafom ekstremalnym oraz grafom posiadającym określone własności lokalne. Prezentowane wyniki dotyczą *wybranych własności grafów jako instancji problemów optymalizacyjnych* oraz ich związków z efektywnością algorytmów.

◇

W literaturze znajdujemy wiele interpretacji pojęcia grafu ekstremalnego. W pracy [B3] graf ekstremalny rozumiemy jako egzemplarz z ustalonej klasy grafów (danej, np. przez ograniczenia dla wybranych niezmienników grafowych), dla którego określony niezmiennik (np. rząd grafu) osiąga wartość ekstremalną.

Tematyka badań, których wyniki prezentujemy w pracy [B3] sięga swoimi korzeniami do pracy Christena i Selkova [4] i jest bezpośrednią kontynuacją badań prowadzonych wcześniej przez Chartranda i in. [3], które dotyczyły własności i istnienia grafów o ustalonych wartościach trzech niezmienników: liczby chromatycznej $\chi(G)$, liczby Grundy $\Gamma(G)$ oraz liczby achromatycznej $\psi(G)$. Liczby te są ściśle związane z tzw. *kolorowaniem kompletnym*, określanym jako pokolorowanie właściwe, w którym dla każdej pary różnych kolorów i oraz j istnieją sąsiednie wierzchołki o kolorach i oraz j . Liczba chromatyczna i achromatyczna są, odpowiednio, najmniejszą i największą liczbą kolorów osiąganą dla pokolorowań kompletnych danego grafu, a ponieważ każde pokolorowanie grafu G wygenerowane przez algorytm zachłanny jest pokolorowaniem kompletnym, liczby te łączą następująca zależność

$$\chi(G) \leq \Gamma(G) \leq \psi(G).$$

Wspomniana powyżej praca [3] przynosi rozwiązanie problemu o charakterze egzystencjalnym, w którym pytano, dla jakich liczb całkowitych a, b, c spełniających warunek $2 \leq a \leq b \leq c$, istnieje spójny graf G taki, że

$$\chi(G) = a, \quad \Gamma(G) = b, \quad \psi(G) = c. \quad (11)$$

W pracy [B3] rozważamy problem o charakterze ekstremalnym, w którym dla ustalonych liczb a, b, c pytamy o grafy G o najmniejszym rzędzie wśród grafów spełniających (11). Przeprowadzona przez nas szczegółowa analiza takich grafów dla wszystkich dopuszczalnych trójek (a, b, c) , opisanych w pracy [3], wskazuje, że istotną cechą poszukiwanych przez nas grafów G jest to, czy spełniają one warunek $\Gamma(G) = \chi(G)$, tzn. czy są grafami optymalnie kolorowanymi przez algorytm zachłanny.

Wykazaliśmy, że wśród poszukiwanych przez nas grafów, to grafy, które są optymalnie kolorowalne przez algorytm zachłanny mają $2c - a + 1$ wierzchołków, natomiast rząd pozostałych wynosi $2c - a$. Ponadto, kontynuując badania dla grafów optymalnie kolorowalnych przez algorytm zachłanny w rodzinie grafów 3-chromatycznych (przypadek $a = b = 3$), dla każdego $c > 3$ *skonstruowaliśmy wszystkie grafy* o najmniejszej liczbie wierzchołków spełniające (11).

Istotną motywację dla powyższych badań stanowiła chęć bliższego poznania *własności grafów optymalnie kolorowalnych przez algorytm zachłanny* – wiedza o takich grafach jest ciągle bardzo ograniczona. Wśród nietrywialnych klas grafów optymalnie kolorowalnych przez algorytm zachłanny można wymienić klasę grafów P_4 -wolnych [4] oraz, opisaną w punkcie 2.3 sekcji IV, klasę grafów, dla których $\chi(G) = Q(G) + 1$, gdzie $Q(G)$ jest zdefiniowanym w pracy [A2] potencjałem schodkowym grafu G .

◇

Potencjalne zastosowania. Jednym z potencjalnych zastosowań wyników uzyskanych w pracy [B3] jest wykorzystanie skonstruowanych przez nas grafów w charakterze tzw. benchmarków (patrz, np. [5], [C10]), stosowanych w testowaniu i porównywaniu algorytmów (patrz także [1]). Grafy o podobnym charakterze można znaleźć również w zbiorach “interesujących grafów”, np. baza danych *House of Graphs* [2], w momencie utworzenia, zawierała niemal wyłącznie grafy ekstremalne (ze

względu na różne niezmienniki grafowe) wygenerowane przez system *GraPHedron* [7]. Systemy takie stanowią ważne narzędzia badawcze i wspomagające implementacje. Interesujące ujęcie powiązań grafów ekstremalnych z metodami optymalizacji kombinatorycznej przedstawiono w pracy [5].

- [1] D.A. Bader, H. Meyerhenke, P. Sanders, D. Wagner (eds), Graph Partitioning and Graph Clustering, 10th DIMACS Implementation Challenge, Contemporary Mathematics 588, American Mathematical Society, 2012.
- [2] G. Brinkmann, K. Coolsaet, J. Goedgebeur, H. Mélot, *House of Graphs: A database of interesting graphs*, Discrete Applied Mathematics 161(1–2) (2013), 311–314.
- [3] G. Chartrand, F. Okamoto, P. Zhang, Zs. Tuza, *A note on graphs with prescribed complete coloring numbers*, Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing LXXIII (2010), 77–84.
- [4] C.A. Christen, S.M. Selkow, *Some perfect coloring properties of graphs*, Journal of Combinatorial Theory Ser. B 27 (1979), 49–59.
- [5] D. Cvetković, P. Hansen, V. Kovačević-Vujčić, *On some interconnections between combinatorial optimization and extremal graph theory*, Yugoslav Journal of Operations Research 14(2) (2004), 147–154.
- [6] P. Hansen, J. Kuplinsky, *The smallest hard-to-color graph*, Discrete Mathematics 96(3) (1991), 199–212.
- [7] H. Mélot, *Facet defining inequalities among graph invariants: the system GraPHedron*, Discrete Applied Mathematics 156 (2008), 1875–1891.

◇

Korzenie zagadnień, którymi zajmujemy się w pracy [B6] sięgają prac Trahtenbrota w teorii automatów i wywodzącego się z niej problemu Trahtenbrota-Zykova (1963), w którym dla danej rodziny grafów \mathcal{H} pytamy o istnienie grafu $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, gdzie $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ to klasa grafów G takich, że sąsiedztwo *każdego* wierzchołka grafu G indukuje graf należący do rodziny \mathcal{H} . W oryginalnym sformułowaniu problemu rodzina \mathcal{H} była jednoelementowa, jednak później, problem rozważano najczęściej w wersji ogólnej. Dla grafów skończonych Bugata [2] wykazał, że powyższy problem jest niealgorytmiczny, nawet wtedy, gdy \mathcal{H} jest skończona. Większość badań koncentrowała się wokół konstrukcji klas grafów dla różnych rodzin \mathcal{H} oraz poszukiwania oszacowań dla największego i najmniejszego rozmiaru grafu o ustalonej liczbie wierzchołków w $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Na przykład, Erdős i Simonovits [3] wyznaczyli największy rozmiar grafów n -wierzchołkowych w $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, gdy \mathcal{H} jest rodziną grafów acyklicznych. Rozważano również oszacowania, gdy \mathcal{H} jest rodziną grafów 1-regularnych, k -spójnych, ścieżek, cykli, drzew, a także grafów o ograniczonej z dołu liczbie krawędzi.

W pracy [B6] rozważamy klasę $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, gdy \mathcal{H} jest rodziną k -drzew. O grafach takiej klasy mówimy, że są *lokalnie k -drzewiaste*. W szczególności wykazaliśmy, że $(k+1)$ -drzewa są lokalnie k -drzewiaste oraz, że każdy spójny graf, który jest lokalnie k -drzewiasty zawiera podgraf spinający będący $(k+1)$ -drzewem. Pozwoliło to na *podanie charakteryzacji n -wierzchołkowych grafów lokalnie k -drzewiastych o najmniejszym rozmiarze*. Sformułowany przez nas problem analogicznej charakteryzacji dla grafów o największym rozmiarze pozostaje otwarty; znana jest jedynie podana przez nas *konstrukcja maksymalnych grafów lokalnie k -drzewiastych* dużego rozmiaru, na podstawie której *wyznaczyliśmy dolne oszacowanie* największego rozmiaru grafu lokalnie k -drzewiastego o n wierzchołkach.

◇

Potencjalne zastosowania. Jednym z najbardziej interesujących współczesnych zastosowań własności lokalnych grafów są intensywnie badane i stosowane algorytmy rozproszone (patrz, np. Balliu i in. [1], Peleg [5]) w tym, np. algorytmy detekcji podgrafów (patrz, Fraigniaud i in. [4]).

- [1] A. Balliu, G. D’Angelo, P. Fraigniaud, D. Olivetti, *What can be verified locally*, Proc 34th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2017), LIPIcs 66 (2017), 1–13.

- [2] P. Bugata, *On algorithmic solvability of Trahtenbrot-Zykov problem*, KAM Series in Discrete Mathematics and Combinatorics 90(167) (1990), 1–20.
- [3] P. Erdős, M. Simonovits, *A limit theorem in graph theory*, Studia Sci. Math. Hung. 1 (1966), 51–57.
- [4] P. Fraigniaud, D. Olivetti, *Distributed detection of cycles*, Proc 29th ACM Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures, (SPAA 2017), 153–162.
- [5] D. Peleg, *Distributed computing: A locality-sensitive approach*. SIAM, 2000.

5. Algorytmy agentowe przeszukiwania, inspekcji i ewakuacji w grafach

Omawiane w tym wątku tematycznym prace dotyczą problemów, w których rozważamy zarówno rozproszone, jak i scentralizowane strategie przemieszczania agentów w grafie, gwarantujące osiągnięcie następujących celów:

- przechwycenie intruza ukrywającego się w grafie [B2],
- przeprowadzenie inspekcji grafu [B4],
- ewakuowanie agentów z grafu [C2].

Rozważane w poszczególnych pracach problemy oprócz różnych celów przemieszczania agentów, różnią się też pod względem kryterium optymalizacyjnego (minimalizacja liczby agentów albo czasu), znajomości struktury grafu przez agentów (znany z góry albo odkrywany na bieżąco podczas działania algorytmu) oraz pod względem, wspomnianego wcześniej, modelu obliczeń (scentralizowany albo rozproszony).



Praca [B2] dotyczy krawędziowego wariantu problemu przeszukiwania nieznanego grafu (znanego również jako problem przechwytywania intruza), którego każdy wierzchołek v ma przypisaną wagę $\omega(v)$ będącą liczbą całkowitą mówiącą o minimalnej liczbie agentów, którzy muszą znajdować się w wierzchołku v aby intruz nie mógł przeniknąć przez ten wierzchołek. Wierzchołek v , w którym przebywa co najmniej $\omega(v)$ agentów nazywamy *strzeżonym*. Podstawowym ruchem agentów jest przemieszczenie się wzdłuż krawędzi w celu jej *zabezpieczenia*, czyli zagwarantowania, że nie ma w niej intruza. W modelu rozproszonym strategia agentów powinna zapewniać, że raz zabezpieczony podgraf na zawsze pozostaje wolny od intruza. O takiej strategii mówimy, że jest *monotoniczna*. Odnośnie intruza przyjmujemy, że jest on bardzo szybki, tzn. w czasie pomiędzy dowolnymi dwoma ruchami agentów, może przemieścić się wzdłuż dowolnie długiej marszruty, której wierzchołki nie są strzeżone. Przyjmujemy również, że intruz jest niewidoczny, tzn. wiedza agentów o podgrafie, w którym aktualnie znajduje się intruz, wynika wyłącznie z wcześniejszych posunięć agentów. Zakładamy ponadto, że intruz w każdej chwili zna położenie wszystkich agentów oraz ich strategię. Zakończenie przeszukiwania (schwywanie intruza) następuje, gdy podgraf, w którym może przebywać intruz, staje się grafem pustym. Ponieważ interesujące są wyłącznie takie strategie, które gwarantują przechwycenie intruza, powyższe założenia powodują, że strategia agentów musi być tzw. “strategią najgorszego przypadku” (ang. *worst case strategy*). Celem jest wyznaczenie strategii, realizowanej przez jak najmniejszą liczbę agentów. Dla danego grafu G najmniejsza liczba agentów, dla której istnieje strategia przeszukująca graf G nazywana jest *liczbą przeszukiwawczą* (ang. *search number*) grafu G . Powyższe sformułowania sięgają swoimi korzeniami do pracy Parsonsa [11].

Na podstawie wyników Ilcinkasa i in. [6] wiemy, że jeżeli przeszukiwany graf jest nieznaną, to dla każdej monotonicznej strategii, można podać drzewo o n wierzchołkach, dla którego konieczne będzie użycie $\Theta(n)$ agentów. Z drugiej strony Megiddo i in. [9] wykazali, że $O(\log n)$ agentów zawsze wystarcza do przeszukania grafu w trybie offline. Zatem dla współczynnika konkurencyjności zachodzi ograniczenie $\Omega(n/\log n)$. Powyższe negatywne oszacowanie, podobnie jak w trybie on-line, również

w kontekście obliczeń rozproszonych skłania do rozważenia algorytmów z dodatkową informacją (kierunek badań rozwijany, np. w pracach [4, 5, 10]).

W pracy [B2] graf nie jest znany z góry a dodatkowa informacja dostarczana jest agentom przez tzw. *poczucie kierunku* będący cechą agenta zrealizowaną przez utworzenie podziału (V_1, \dots, V_t) zbioru wierzchołków grafu, w którym wierzchołki będące końcami tej samej krawędzi należą do zbiorów V_i, V_j takich, że $|i-j| \in \{0, 1\}$. Podział ten pozwala agentowi przebywającemu w wierzchołku v zbioru V_i na zorientowanie się, czy przejście wzdłuż nieznaney mu dotychczas krawędzi vu do wierzchołka u zaprowadzi go do zbioru V_{i-1}, V_i , czy do V_{i+1} .

Dostarczenie agentom dodatkowej informacji o “kierunku” przemieszczania się podczas odkrywania (eksploracji) grafu umożliwi zapisanie reguł precyzyjnego pielęgnowania granic przeszukanego (bezpiecznego) podgrafu. Pozwala to na *podanie monotonicznej spójnej strategii przeszukiwania dowolnego grafu* przy pomocy co najwyżej $3 \cdot \max_{1 \leq i \leq t} \omega(V_i) + 1$ agentów, gdzie $\omega(V_i) = \sum_{v \in V_i} \omega(v)$ (strategię nazywamy spójną jeżeli w każdym momencie zabezpieczony przez nią graf jest spójny). Wykazaliśmy również, że podany przez nas *algorytm jest najlepszym z możliwych* (z dokładnością do stałej addytywnej 2).

Stosując techniki zbliżone do podanych przez Dereniowskiego [3], otrzymujemy możliwość wykorzystania powyższego algorytmu do przetransformowania danej na wejściu dekompozycji ścieżkowej (ang. *path decomposition*) o szerokości k , na spójną dekompozycję ścieżkową o szerokości co najwyżej $2k + 1$. Innymi słowy $\text{cpw}(G) \leq 2 \cdot \text{pw}(G) + 1$, gdzie $\text{pw}(G)$ oznacza szerokość ścieżkową (ang. *pathwidth*) grafu G , natomiast $\text{cpw}(G)$ jest jego spójną szerokością ścieżkową (ang. *connected pathwidth*). *Istotną implikacją* tego rezultatu jest możliwość wykorzystania wielu wyników związanych z dekompozycją ścieżkową i klasyczną wersją problemu przeszukiwania (wersją off-line) zarówno w kontekście spójnych dekompozycji, jak i spójnych strategii przeszukiwania.

◇

Potencjalne zastosowania. Jednym z najbardziej bezpośrednich praktycznych zastosowań algorytmów przeszukiwania grafów jest eksploracja nieznanego terenu przez autonomiczne roboty. Wśród innych zastosowań w literaturze wymieniane są, np. przydział rejestrów procesora [2], optymalizacja wykonania testów diagnostycznych [1] oraz analiza struktury tekstu [8].

- [1] M. Aschinger, C. Drescher, G. Gottlob, P. Jeavons, E. Thorstensen, *Structural decomposition methods and what they are good for*, Proc. 28th International Symposium on Theoretical Computer Science (STACS 2011), Leibnitz International Proceedings in Informatics 9 (2011), 12–28.
- [2] H.L. Bodlaender, J. Gustedt, J.A. Telle, *Linear-time register allocation for a fixed number of registers*, Proc. 9th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '98), 574–583.
- [3] D. Dereniowski, *From pathwidth to connected pathwidth*, SIAM Journal on Discrete Mathematics 26(4) (2012), 1709–1732.
- [4] D. Dereniowski, A. Pelc, *Drawing maps with advice*, Journal of Parallel and Distributed Computing 72(2) (2012), 132–143.
- [5] P. Fraigniaud, C. Gavoille, D. Ilcinkas, A. Pelc, *Distributed computing with advice: information sensitivity of graph coloring*, Distributed Computing 21 (2009), 395–403.
- [6] D. Ilcinkas, N. Nisse, D. Soguet, *The cost of monotonicity in distributed graph searching*, Distributed Computing 22(2) (2009), 117–127.
- [7] G. Kant, *Drawing planar graphs using the canonical ordering*, Algorithmica 16 (1996), 4–32.
- [8] A. Kornai, Zs. Tuza, *Narrowness, pathwidth, and their application in natural language processing*, Discrete Applied Mathematics 36(1) (1992), 87–92.
- [9] N. Megiddo, S.L. Hakimi, M.R. Garey, D.S. Johnson, C.H. Papadimitriou, *The complexity of searching a graph*, Journal of the ACM 35(1) (1988), 18–44.

- [10] N. Nisse, D. Soguet, *Graph searching with advice*, Theoretical Computer Science 410(14) (2009), 1307–1318.
- [11] T.D. Parsons, *Pursuit-evasion in a graph*, Proc. Theory and Applications of Graphs, Lecture Notes in Mathematics 642 (1978), 426–441.

◇

W pracy [B4] rozważamy wariant procesu inspekcji grafu, nazywanego również czyszczeniem za pomocą szczotek (ang. *cleaning with brushes*), zdefiniowanego przez Messingera i in. [5]. W procesie inspekcji dokonywanej przez agentów przeglądom podlegają wierzchołki i krawędzie znanego z góry grafu. Na początku procesu, wszystkie wierzchołki i krawędzie uważane są za nieprzebadane a w każdym wierzchołku grafu może być umieszczona pewna liczba agentów. Podstawowym ruchem agenta jest przemieszczenie się wzdłuż krawędzi w celu dokonania jej *przebadania*. Wierzchołek v jest gotowy do przebadania, gdy przebywa w nim co najmniej tyle agentów ile jest nieprzebadanych krawędzi incydentnych z v . Dokonanie przebadania takiego wierzchołka polega na równoczesnym przebadaniu wszystkich nieprzebadanych wcześniej krawędzi z nim incydentnych. Agenci nie mogą poruszać się wzdłuż przebadanych już krawędzi, mogą natomiast pozostać w przebadanym wierzchołku, jeżeli nie są potrzebni do jego przebadania. Inspekcję grafu uznajemy za zakończoną, gdy przebadane zostały wszystkie jego wierzchołki i krawędzie. Celem jest podanie strategii, realizowanej przez jak najmniejszą liczbę agentów – dla grafu G liczba ta oznaczana jest przez $b(G)$ (ang. *brush number*).

O problemie w wersji decyzyjnej wiemy, że jest NP-zupełny [2]. W odróżnieniu od procesu równoległego badanego przez Gaspersa i in. [1], w omawianej tu pracy [B4], podobnie jak w [5], rozważamy proces sekwencyjny, co oznacza, że w każdym momencie może odbywać się przegląd co najwyżej jednego wierzchołka.

W rozważanym przez nas wariantcie inspekcji, uruchomienie przebadania wierzchołka podlega dodatkowemu ograniczeniu. Mianowicie, oprócz wystarczającej liczby agentów w wierzchołku, wymagamy aby liczba nieprzebadanych krawędzi incydentnych z wierzchołkiem była nie większa niż wartość ustalonego parametru k . Wariant ten nazywamy *inspekcją z ograniczeniem k* . Wprowadzenie dodatkowego wymagania powoduje, że dla każdego k można podać grafy, dla których nie da się przeprowadzić inspekcji z ograniczeniem k . Prowadzi to do naturalnego pytania o grafy, dla których strategię takie istnieją.

W pracy [B4], w pierwszej kolejności podajemy charakteryzacje klas \mathcal{F}_k , składających się z tych grafów, które posiadają strategię inspekcji z ograniczeniem k . Następnie, rozróżniając przypadki, w których $k = 1$ albo $k \geq 2$, dla klas \mathcal{F}_k rozważamy wartości niezmiennika $b_k(G)$ będącego najmniejszą liczbą agentów niezbędnych do przeprowadzenia inspekcji z ograniczeniem k w grafie G (ang. *k -brush number*). Korzystając z programowania dynamicznego podajemy algorytm, który dla danej liczby k i drzewa T , w liniowym czasie wyznacza dokładną wartość parametru $b_k(T)$.

Ponadto, analizując zależności pomiędzy obydwoma typami inspekcji (z ograniczeniem k i bez ograniczenia) rozważamy możliwe wartości wartości $b_k(G)/b(G)$. W szczególności wykazaliśmy, że dla dowolnych $k \in \mathbb{N}$, $x \in \langle 1, 2 \rangle$ i $\varepsilon > 0$ istnieje drzewo T takie, że $|b_k(T)/b(T) - x| < \varepsilon$, oraz że nierówność ta nie jest spełniona dla żadnych innych wartości x . Podobnie wykazaliśmy, że dla każdego $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $x \in \langle 1, \infty \rangle$ i $\varepsilon > 0$ istnieje graf G , dla którego $|b_k(G)/b(G) - x| < \varepsilon$.

◇

Potencjalne zastosowania. Wśród potencjalnych zastosowań procesów inspekcji warto wskazać na ich bezpośredni związek z problemem wyznaczania *zrównoważonego uporządkowania wierzchołków* grafu (ang. *balanced vertex-ordering*), któremu to związkowi poświęcona jest praca [2]. Zrównoważone uporządkowania wierzchołków stanowią punkt wyjścia dla wielu algorytmów rysowania grafów,

np. podanych przez Kanta [3] i Wooda [6]. Korzystając z zależności pomiędzy $b(G)$ oraz tzw. minimalnym całkowitym niezbalansowaniem grafu (ang. *minimum total imbalance*) Gaspers i in. [2] zastosowali algorytm dla problemu inspekcji do problemu zrównoważonego uporządkowania wierzchołków, uzyskując algorytm lepszy od algorytmu Káry i in. [4]. Wprowadzenie wariantu inspekcji z ograniczeniem k , wnosi dodatkowy poziom potencjalnej kontroli procesu równoważenia.

- [1] S. Gaspers, M.-E. Messinger, R.J. Nowakowski, P. Prałat, *Parallel cleaning of a network with brushes*, Discrete Applied Mathematics 158 (2009), 467–478.
- [2] S. Gaspers, M.-E. Messinger, R.J. Nowakowski, P. Prałat, *Clean the graph before you draw it!*, Information Processing Letters 109 (2009), 463–467.
- [3] G. Kant, *Drawing planar graphs using the canonical ordering*, Algorithmica 16 (1996), 4–32.
- [4] J. Kára, J. Kratochvíl, D. Wood, *On the complexity of the balanced vertex ordering problem*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 9 (2007), 193–202.
- [5] M.-E. Messinger, R.J. Nowakowski, P. Prałat, *Cleaning a network with brushes*, Theoretical Computer Science 399 (2008), 191–205.
- [6] D.R. Wood, *Minimizing the number of bends and volume in 3-dimensional orthogonal graph drawings with a diagonal vertex layout*, Algorithmica 39 (2004), 235–253.

◇

W pracy [C2] rozważamy problem ewakuacji agentów którzy przebywają w wierzchołkach pewnego grafu i chcą w jak najkrótszym czasie (w jak najmniejszej liczbie kroków) dotrzeć do wyróżnionych wierzchołków nazywanych wyjściami. Ewakuację uważamy za zakończoną w momencie opuszczenia grafu przez ostatniego agenta. Gdy w każdym wierzchołku grafu, w danej chwili, może przebywać co najwyżej jeden agent, na czas ewakuacji poszczególnych agentów może mieć wpływ występowanie wąskich gardeł (ang. *bottlenecks*) oraz tworzenie się zatorów (ang. *congestions*). Rozważamy scentralizowany oraz rozproszony model obliczeń. W modelu scentralizowanym zarówno graf z wyróżnionymi wyjściami jak i położenie agentów w wierzchołkach znane są z góry. W modelu rozproszonym każdy agent zna z góry cały graf wraz z wyróżnionymi wyjściami oraz wie, w którym wierzchołku grafu aktualnie przebywa. Główną przeszkodą w zaplanowaniu optymalnej ewakuacji jest w tym przypadku brak wiedzy agenta o początkowym położeniu innych agentów. Wiedzę tę każdy agent poszerza w trakcie działania, dzięki możliwości komunikacji bezpośredniej z agentami znajdującymi się w odległości $d \leq 2$ oraz komunikacji pośredniej z pozostałymi agentami, gdy tworzy z nimi tzw. grupę.

Przyjmując powyższe założenia, dla modelu scentralizowanego *podaliśmy optymalny wielomianowy algorytm* odwołujący się do klasycznego algorytmu Edmonsa i Karpa [3] dla maksymalnego przepływu. Z drugiej strony, rozważając heterogenicznych agentów (różniących się dostępnymi dla nich podgrafami), wykazaliśmy, że nawet dla dwóch typów agentów wyznaczenie optymalnej strategii ewakuacji jest NP-trudne.

Jednym z głównych celów powstania pracy [C2] było uzyskanie odpowiedzi na pytanie, jak bardzo ograniczenie informacji o wzajemnym położeniu agentów może wpłynąć na jakość rozwiązania wyznaczanego w modelu rozproszonym.

W pierwszej kolejności *wykazaliśmy, że nie istnieje algorytm rozproszony* pozwalający na ewakuację agentów w czasie krótszym niż dwukrotny czas optymalny (tzn. algorytm 2-konkurencyjny), nawet jeżeli ograniczymy się do ważnej w obliczeniach rozproszonych klasy grafów, jakimi są drzewa.

Następnie, skupiając naszą uwagę na drzewach, *podaliśmy rozproszony algorytm ewakuacji* o współczynniku konkurencyjności wynoszącym 72, potwierdzając równocześnie, sprzeczną z intuicją hipotezę, że pomimo bardzo ograniczonej informacji o wzajemnym położeniu agentów, możliwe jest podanie algorytmu rozproszonego o *stałym* współczynniku konkurencyjności.



Potencjalne zastosowania. Istotną motywacją do podejmowania badań nad ewakuacją są szerokie możliwości zastosowań praktycznych obejmujące zarówno modelowanie ewakuacji osób z budynków [2], sieci ulic [4] jak również grupowanie autonomicznych mobilnych robotów w wyznaczonych miejscach [1] (odpowiadających wyjściom w terminologii ewakuacji). Pomimo coraz powszechniejszego dostępu do technologii komunikacyjnej (również z poziomu pojedynczego agenta) istotną wadą rozwiązań scentralizowanych pozostaje ich duża podatność na awarie jak również zakłócenia komunikacji. W kontekście tym, nie bez znaczenia jest również ograniczony zasięg nadajników którymi dysponują agenci, wynikający między innymi z konieczności racjonowania zgromadzonej w bateriach energii.

- [1] A. Pelc, *Deterministic rendezvous in networks: A comprehensive survey*, Networks 59 (2012), 331–347.
- [2] L. Chalmet, R. Francis, P. Saunders, *Network models for building evacuation*, Fire Technology 18(1) (1982), 90–113.
- [3] J. Edmonds, R. Karp, *Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems*, Journal of the ACM 19(2) (1972) 248–264.
- [4] Y. Higashikawa, M. Golin, N. Katoh, *Multiple sink location problems in dynamic paths networks*, Theoretical Computer Science 607 (2015), 2–15.

6. Badania przed doktoratem – uwzględnione w rozprawie doktorskiej

Większość wyników tworzących rozprawę doktorską [M3] została opublikowana w pracach [C5], [C7], [C9]–[C11] i [A5] (s.124–126), rozdziałach [M1], [M2] dwóch monografii oraz pracy przeglądowej [C12]. Wyniki prezentowane w pracach opublikowanych po [M3] często są wzmocnionymi lub rozszerzonymi wersjami wyników z rozprawy doktorskiej. W pracach tych prezentowane są również całkiem nowe rezultaty. W rozprawie doktorskiej [M3] można wyróżnić cztery główne obszary tematyczne:

- grafy krytyczne dla algorytmów kolorowania właściwego w trybie on-line [A5] (s.124–126),
- kolorowania uogólnione w trybie on-line [C7],
- zastosowania w zarządzaniu zasobami (np. przydział i szeregowanie on-line z uwzględnieniem konfliktów zasobowych, zarządzanie połączeniami w sieciach telekomunikacyjnych) [C5],
- algorytmiczna podatność grafów [C9], [C10] i [C11].

Ostatni rozdział pracy [A5] (s.124–126) poświęcony jest własnościom grafów krytycznych dla zachłannego algorytmu kolorowania właściwego First-Fit oraz problemowi strukturalnej charakterystyki tych grafów. Warunki konieczne podane zostały wcześniej przez Gyárfása i in. [4], który podali grafy 3- i 4-krytyczne (bez uzasadnienia, że są to wszystkie grafy). Głównym wynikiem pracy doktorskiej w opisywanym tu wątku tematycznym było wskazanie rekurencyjnej konstrukcji i wykazanie, że prowadzi ona do uzyskania wszystkich grafów k -krytycznych.

W pracy [C7] podane zostały rozszerzone wersje wyników dotyczących zachłannego kolorowania uogólnionego. W szczególności prezentowane jest dolne oszacowanie funkcji dobroci tzw. algorytmów skąpych (ang. *stingy*) $\Omega(\log n)$, pochodzące z pracy doktorskiej, oraz jego wzmocnienie $\Omega(n)$. Wśród wyników pochodzących z pracy doktorskiej, w pracy [C7] prezentowane są również rezultaty dotyczące charakterystyki \mathcal{P} -drzew, które w uogólnionym kolorowaniu algorytmem zachłannym wymagają co najwyżej k -kolorów.

W pracy [C5] przedstawiony został grafowy model chromatyczny dla problemu przydziału niepodzielnych zadań do systemów, w których zadania te szeregowane są w trybie on-line z uwzględnieniem konfliktów w dostępie do niepodzielnych zasobów. Za kryterium optymalizacyjne przyjęto

minimalizację liczby użytych systemów (równoważnie, replik zasobów) przy równoczesnym zapewnieniu, że czas przepływu (ang. *flow time*) każdego zadania będzie nie większy od ustalonej stałej (kryterium typu QoS). Wskazane zostały potencjalne zastosowania nowego modelu w szeregowaniu zadań wieloprocessorowych na procesorach dedykowanych (patrz również [3]) oraz przydziale kanałów komunikacyjnych w sieciach WDM.

W pracach [C9] i [C11] rozważamy parametry, które pozwalają na ocenę oczekiwanego zachowania algorytmów właściwego kolorowania grafów w trybie on-line. W szczególności podane zostały oszacowania dla przeciętnej liczby chromatycznej (patrz również [1] i [2]) (ang. *mean chromatic number*), przeciętnej dobroci i nowego parametru nazywanego *podatnością grafu*. Praca zawiera także wyniki badań eksperymentalnych oraz informacje o katalogu grafów niepodatnych. W szczególności, z zastosowaniem komputera, wyznaczone zostały grafy małego rzędu o najmniejszych podatnościach na kolorowanie algorytmem zachłannym.

Praca [C10] stanowi przegląd znanych wyników dotyczących grafów trudnych do kolorowania (patrz, np. Hansen i in. [5], Janczewski i in. [6] i Kubale i in. [7]) oraz wspomnianej powyżej podatności grafów. Wyniki zestawione zostały według trybu kolorowania, dla algorytmów sekwencyjnych działających w trybie off-line, oraz osobno dla algorytmów on-line.

- [1] M. Anthony, *On the mean chromatic number*, Discrete Mathematics 125 (1994), 11–14.
- [2] M. Anthony, N. Biggs, *The mean chromatic number of paths and cycles*, Discrete Mathematics 120 (1993), 227–231.
- [3] M. Drozdowski, *Scheduling multiprocessor tasks—an overview*, European Journal of Operational Research 94 (1996), 215–230.
- [4] A. Gyárfás, Z. Király, J. Lehel, *On-line 3-chromatic graphs II. Critical graphs*, Discrete Mathematics 177 (1997), 99–122.
- [5] P. Hansen, J. Kuplinsky, *The smallest hard-to-color graph*, Discrete Mathematics 96(3) (1991), 199–212.
- [6] R. Janczewski, M. Kubale, K. Manuszewski, K. Piwakowski *The smallest hard-to-color graph for algorithm DSATUR*, Discrete Mathematics 236(1-3) (2001), 151–265.
- [7] M. Kubale, J. Pakulski, K. Piwakowski *The smallest hard-to-color graph for the SL algorithm*, Discrete Mathematics 194(1-3) (1997), 197–212.

7. Badania przed doktoratem – nieuwzględnione w rozprawie doktorskiej

Prace [C13], [C14] oraz [C15] dotyczą różnych wariantów problemu podziału zbioru wierzchołków grafów należących głównie do klas związanych z grafami planarnymi, znanymi z wielu praktycznych zastosowań.

Praca [C14] dotyczy problemu podziału zbioru wierzchołków grafów planarnych na jak najmniejszą liczbę zbiorów takich, że każdy z nich indukuje las liniowy (las liniowy to graf, którego wszystkie komponenty są ścieżkami). Poh [5] wykazał, że każdy graf planarny można podzielić na co najwyżej trzy lasy liniowe, natomiast Wang [6] wskazał możliwość podziału każdego grafu zewnętrznie planarnego na dwa lasy liniowe. Głównym rezultatem pracy [C14] jest wzmocnienie wyniku Wanga polegające na podaniu nietrywialnych nadklas grafów zewnętrznie planarnych oraz sposobów konstruowania ich podziałów na co najwyżej dwa lasy liniowe. Pomimo tego, że grafy planarne są jednymi z najbardziej znanych grafów, wiele problemów dla tej klasy wciąż jest przedmiotem intensywnych badań, w tym również problemy ściśle związane z podziałami na lasy liniowe, których dotyczy praca [C14]. Ostatnio Axenovich i in. [3] zmierzając w stronę rozwiązania hipotezy postawionej przez Borodina i Ivanovą [4] o podziale na lasy liniowe o ograniczonej długości ścieżek, rozważali grafy planarne o talii 6 (ang. *girth*) i wykazali, że zawsze można je podzielić na co najwyżej dwa lasy liniowe nie zawierające ścieżek o długości większej niż 14. Wspólną cechą wszystkich powyższych prac jest to, że

dotyczą one relaksacji słynnego twierdzenia o czterech barwach (patrz [1], [2]), które można sformułować jako pytanie o to czy każdy graf planarny posiada podział na co najwyżej cztery lasy liniowe takie, że żaden z nich nie zawiera ścieżki o długości 1.

W pracy [C13] rozważamy problem istnienia podziału zbiorów wierzchołków grafów należących do klas domkniętych ze względu na operację brania minorów. W szczególności wykazaliśmy, że jeżeli weźmiemy dowolne dwie takie klasy \mathcal{P}_1 i \mathcal{P}_2 , przy czym \mathcal{P}_2 pokrywa \mathcal{P}_1 (pokrywanie oznacza, że zachodzą określone związki pomiędzy minimalnymi minorami zabronionymi obu klas), to zbiór wierzchołków każdego grafu z klasy \mathcal{P}_2 można podzielić na dwa zbiory takie, że każdy z nich indukuje graf należący do klasy \mathcal{P}_1 . Istotną zaletą powyższego wyniku jest bardzo szeroki zakres stosowania wynikający z ogólności sformułowania. Jako bezpośrednie implikacje, oprócz nowych wyników, jako wnioski, otrzymaliśmy również szereg rezultatów podanych wcześniej przez innych autorów, m.in. wspomniane powyżej wyniki Poha [5] i Wang [6].

Głównym celem pracy [C15] było opisanie wybranych klas grafów, których zbiór wierzchołków można podzielić na dwa zbiory indukujące grafy z ustalonej klasy \mathcal{P} , przy założeniu, że podział dokonywany jest przez prosty algorytm przeszukiwania wszerz. Między innymi podana została nadklasa klasy grafów planarnych, której grafy posiadają podział na co najwyżej dwa grafy zewnętrznie planarne, co jest rozszerzeniem wyniku Wang [6] o możliwości uzyskania takiego podziału dla każdego grafu planarnego. Ponadto wykazano m.in. możliwość podziału grafów szeregowo-równoległych na co najwyżej dwa lasy.

- [1] K. Appel, W. Haken, *Every planar map is four colorable. Part I: Discharging*, Illinois Journal of Mathematics 21(3) (1977), 429–490.
- [2] K. Appel, W. Haken, J. Koch, *Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility*, Illinois Journal of Mathematics 21(3) (1977), 491–567.
- [3] M. Axenovich, T. Ueckerdt, P. Weiner, *Splitting planar graphs of girth 6 into two linear forests with short paths*, Journal of Graph Theory 85(3) (2017), 601–618.
- [4] O.V. Borodin, A.O. Ivanova, *List strong linear 2-arboricity of sparse graphs*, Journal of Graph Theory 67(2) (2011), 83–90.
- [5] K.S. Poh, *On the linear vertex-arboricity of a planar graph*, Journal of Graph Theory, 14 (1990), 73–75.
- [6] J. Wang, *On point-linear arboricity of planar graphs*, Discrete Mathematics 72 (1988), 381–384.

Piotr Banaś