Marek KUBALE

Politechnika Gdańska, Katedra Algorytmów i Modelowania Systemów

MODELE I METODY KOLOROWANIA GRAFÓW. CZĘŚĆ I

Streszczenie. *Niniejszy artykuł jest pierwszą częścią 2-odcinkowego cyklu przeglądowego na temat modeli i metod kolorowania grafów. Przedstawiono w nim najważniejsze, z punktu widzenia zastosowań, modele kolorowania grafów. W szczególności pokazano:* (1) *co można kolorować w grafie (np. wierzchołki, krawędzie, końcówki, ściany, jednocześnie wierzchołki i krawędzie) oraz* (2) *jak można kolorować (np. dzielenie kolorów, zawijanie kolorów). Ponieważ kolorowanie we wszystkich tych odmianach i wariantach jest NP-trudne, podajemy oszacowania na liczbę chromatyczną (indeks chromatyczny) oraz podajemy potencjalne zastosowania rozważanych modeli w problemach naukowo-technicznych.*

Abstract. *This is the first of a couple of review papers on models and methods of graph coloring. We present herein the main models of graph coloring from a practical point of view. In particular, we show:* (1) *what elements of a graph can be colored (e.g. vertices, edges, faces, incidences) and* (2) *how these elements can be colored (e.g. fractional coloring, circular coloring). Since graph coloring is NP-hard in various modifications and variants, we give simple bounds on the chromatic number (chromatic index) as well as we give potential applications of the chromatic methods in science and technology. (MODELS AND METHODS OF GRAPH COLORING. PART I).*

Słowa kluczowe: kolorowanie grafu, liczba chromatyczna, indeks chromatyczny, NP-trudność
Keywords: graph coloring, chromatic number, chromatic index, NP-hardness

1. Wprowadzenie

Problemy kolorowania grafów należą do najtrudniejszych problemów kombinatorycznych w sensie złożoności obliczeniowej. Wykazano, że skonstruowanie algorytmu aproksymacyjnego o polilogarytmicznej funkcji dobroci jest NP-trudne, chyba że P = NP [1]. Z tego względu jednym z kluczowych zagadnień teorii kolorowania grafów jest określenie granicy pomiędzy przypadkami obliczeniowo łatwymi, tj. wielomianowymi, które tworzą klasę P oraz trudnymi, czyli tzw. NP-zupełnymi (NPC). Zagadnienia te są ściśle związane z naczelnym problemem współczesnej informatyki teoretycznej, jakim jest pytanie milenijne o to, czy P = NP.

Najczęściej w problemie kolorowania grafów bada się dwa zagadnienia: kolorowanie wierzchołków i kolorowanie krawędzi. Mimo że oba zagadnienia są NP-trudne, kolorowanie krawędzi jest łatwiejsze z punktu widzenia możliwości skonstruowania efektywnych algorytmów aproksymacyjnych. Jest tak dlatego, ponieważ w przypadku kolorowania krawędzi zachodzi twierdzenie Vizinga [2] mówiące, że wartość indeksu chromatycznego grafu prostego G nie przekracza nigdy $\Delta(G) + 1$, gdzie $\Delta(G)$ jest stopniem grafu (patrz pkt 2).

Jednym z celów niniejszej pracy jest pokazanie, że w grafie koloruje się nie tylko wierzchołki bądź krawędzie, ale i tzw. końcówki oraz ściany, o ile graf jest płaski. Ponadto pokazanie, że są różne modele i kryteria kolorowania, np. obok minimalizacji liczby użytych kolorów również minimalizacja sumy wszystkich użytych kolorów. Ponadto nieklasyczne modele kolorowania mogą wprowadzać dodatkowe ograniczenia na stosowanie kolorów, zezwalać na przypisanie więcej niż jednego koloru (multikolorowanie), zezwalać na dzielenie i „zawijanie” kolorów itd. Większość z nich dotyczy zarówno kolorowania wierzchołków jak i krawędzi, ale niektóre z nich określone są wyłącznie dla wierzchołków bądź krawędzi. Tym właśnie modelom będzie poświęcona druga część 2-odcinkowego cyklu.

Problem kolorowania grafów ma długą, ponad 150-letnią historię, wiele zastosowań oraz kilkaset problemów otwartych. W książce [3] znaleźć można między innymi zręby tej historii oraz ponad 20 zastosowań praktycznych problemu kolorowania wierzchołków i krawędzi grafu, natomiast w książce [4] znajdziemy opis ponad 200 problemów otwartych w obszarze analizy chromatycznej grafów.

2. Co można kolorować w grafie

Historycznie rzecz biorąc pierwszym modelem kolorowania było kolorowanie map. To właśnie w połowie XIX wieku zaobserwowano, że do pomalowania mapy hrabstw Anglii potrzeba jedynie 4 barw. Jednakże przełom nastąpił dopiero w epoce komputerowej (i dzięki komputerom), gdy Appel i Haken [5] opublikowali pierwszy pełny dowód twierdzenia o 4 barwach dla dowolnej liczby państw na mapie. Mniej więcej w tym samym czasie udowodniono, że problem kolorowania grafów planarnych jest NP-trudny, co oznacza, że problem ogólny, o którym mówimy, jest również NP-trudny [6].

Zagadnienie kolorowania map politycznych jest równoważne zadaniu kolorowania ścian grafów zwanych mapami. *Mapy* to takie grafy planarne, które nie mają mostów. Na przykład drzewa nie są mapami. Zatem znamy bardzo precyzyjne oszacowanie minimalnej liczby kolorów wystarczających do pomalowania ścian dowolnej mapy G, którą nazwiemy *numerem chromatycznym grafu* i oznaczymy $\chi_S(G)$. Mianowicie, $\chi_S(G) \leq 4$. Zauważmy, że mapa G jest 2-barwna wtedy i tylko wtedy, gdy jest eulerowska, zaś mapa kubiczna G jest 3-barwna wtedy i tylko wtedy, gdy jest graf G jest dwudzielny.

Mapie można przyporządkować graf *dualny*, który powstaje w ten sposób, że każdej ścianie przypisuje się dowolny punkt wewnętrzny będący wierzchołkiem grafu dualnego, zaś dwa wierzchołki połączone są krawędzią, gdy ich ściany mają wspólną granicę. Wówczas, jak łatwo widzieć, kolorowanie ścian mapy jest równoważne kolorowaniu wierzchołków grafu dualnego. Podobnie, kolorowanie krawędzi grafu jest równoważne kolorowaniu wierzchołków jego grafu krawędziowego. Dlatego najbardziej ogólnym modelem kolorowania grafów jest kolorowanie wierzchołków.

Czytelnika zainteresowanego szczegółowymi informacjami na temat kolorowania wierzchołków odsyłamy do [7]. Tutaj ograniczymy się do podania podstawowych informacji dotyczących tego modelu. I tak, istnieje szereg oszacowań dolnych i górnych *liczby chromatycznej* $\chi(G)$, czyli minimalnej liczby kolorów potrzebnych do pomalowania wierzchołków grafu G, tak aby wierzchołki jednobarwne nie były połączone krawędzią. Jednakże najbardziej znanym i najłatwiejszym do udowodnienia jest $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$, które można wzmocnić do postaci $\chi(G) \leq \Delta(G)$, o ile G nie jest cyklem nieparzystym lub grafem pełnym [8]. Oznacza to, że podane oszacowanie jest dokładne dla obu klas grafów. Z drugiej strony, oszacowanie to jest bardzo słabe dla gwiazd, dla których $\chi(K_{1,n}) = 2$, podczas gdy $\Delta(K_{1,n}) = n$. W praktyce, najlepszym oszacowaniem liczby chromatycznej od góry są wyniki dostarczane przez przybliżone metody kolorowania grafów.

Jeśli chodzi o przebieg granicy pomiędzy przypadkami łatwymi i trudnymi obliczeniowo, to wydaje się, że najbardziej skomplikowaną klasą grafów, dla których istnieją jeszcze algorytmy wielomianowe, są grafy tzw. doskonałe, zaś najprostszą klasą grafów, której kolorowanie jest już NP-trudne są grafy planarne. W przypadku ogólnym musimy zdać się na algorytmy przybliżone. Generalnie, wielomianowe algorytmy przybliżone dzielimy na te, które mają liniową funkcję dobroci w najgorszym przypadku i te, które mają subliniową funkcję dobroci. Z tego punktu widzenia najlepszą heurystyką jest algorytm Halldórssona o dobroci $O(n(\log\log n)^2/\log^3 n)$ [9]. Jednakże, w przypadku przeciętnym najlepiej spisują się algorytmy sekwencyjne, np. saturacyjny LF [10].

Problem kolorowania krawędzi tak, aby wszystkie krawędzie stykające się w dowolnym wierzchołku miały różne barwy, narodził się w 1880 roku, kiedy to Tait [11] pokazał, iż problem 4 barw jest równoważny problemowi 3-kolorowania krawędzi dowolnej mapy kubicznej. Bardzo ważnym wynikiem było wspomniane twierdzenie Vizinga o *indeksie chromatycznym multigrafów* $\chi'(G)$, czyli minimalnej liczbie barw wystarczającej do pomalowania krawędzi G. W przypadku grafów prostych mówi ono, że $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$. Daje to podstawę do podziału wszystkich grafów prostych na dwie klasy: *klasę 1*, dla której $\chi'(G) = \Delta(G)$ i *klasę 2*, dla której $\chi'(G) = \Delta(G)+1$. Przykładami grafów klasy 1 są grafy dwudzielne. Przykładami grafów klasy 2 są cykle nieparzyste. Asymptotycznie, prawie wszystkie grafy są klasy 1 [12]. Kolorowanie krawędzi jest równoważne podziałowi zbioru krawędzi na skojarzenia, czyli podzbiory izolowanych krawędzi.

Twierdzenie Vizinga daje bardzo dobre oszacowanie na indeks chromatyczny. Co więcej, jego dowód pokazuje, jak pomalować graf podaną liczbą kolorów w wielomianowym czasie. Dlatego naukowcy więcej czasu poświęcają trudniejszemu przypadkowi, jakim jest kolorowanie krawędzi multigrafów. Najbardziej skomplikowaną klasą grafów, dla której istnieją wielomianowe algorytmy kolorujące są prawdopodobnie grafy dwudzielne, natomiast najprostszą klasą grafów, której kolorowanie jest już NP-trudne są grafy kubiczne.

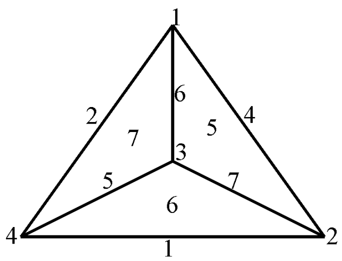
Jak już wspominaliśmy, kolorowanie krawędzi jest równoważne kolorowaniu wierzchołków grafów krawędziowych. Oznacza to, że do pokolorowania można podejść dwuetapowo: najpierw skonstruować odpowiedni graf krawędziowy, następnie pokolorować jego wierzchołki którąś z metod przybliżonych. Aczkolwiek takie podejście jest możliwe, to jest ono nieopłacalne. Problem kolorowania krawędzi ma bowiem swoje własne techniki dedykowane dla szczególnych klas grafów oraz doskonały algorytm 1-absolutnie aproksymacyjny w przypadku ogólnym. Więcej informacji na temat kolorowania krawędzi można znaleźć w pracy [13].

Kolorowanie totalne polega na jednoczesnym malowaniu wierzchołków i krawędzi. Zakłada się, że żadne dwa wierzchołki sąsiednie, żadne dwie krawędzie sąsiednie i żadna krawędź incydentna z wierzchołkiem nie mogą otrzymać tej samej barwy. Najmniejszą liczbę barw dopuszczającą takie pomalowanie grafu G nazywamy *totalną liczbą chromatyczną* i oznaczamy $\chi''(G)$. Łatwo pokazać, że $\chi''(G) \le 2\Delta(G)+1$. W tym celu najpierw znajdujemy $(\Delta+1)$-pokolorowanie krawędzi, a potem zachłannie kolorujemy wierzchołki. W momencie kolorowania wierzchołka „widzi" on co najwyżej $2\Delta(G)$ różnych kolorów na incydentnych krawędziach i sąsiednich wierzchołkach. Udowodniono, że $\chi''(G) \le \Delta(G)+1026$, jednakże przypuszcza się, że $\chi''(G) \le \Delta(G)+2$. Na tej podstawie można wszystkie grafy proste podzielić na trzy typy: *typu 1*, gdy $\chi''(G) = \Delta(G)+1$; *typu 2*, gdy $\chi''(G) = \Delta(G)+2$ oraz *typu 3*, gdy $\chi''(G) \ge \Delta(G)+3$. Innymi słowy sądzi się, że grafy typu 3 nie istnieją. Przykładami grafów typu 1 są pełne K_n dla n nieparzystych, zaś typu 2 – pełne K_n dla n parzystych. Kolorowanie totalne może mieć zastosowanie w szeregowaniu zadań jednostkowych 1- i 2-procesorowych na maszynach dedykowanych.

Jeżeli graf G jest płaski, to można pokusić się o jednoczesne kolorowanie wierzchołków, krawędzi i ścian. Najmniejszą liczbę barw dopuszczającą takie pomalowanie grafu nazywamy *całkowitą liczbą chromatyczną* i oznaczamy $\chi'''(G)$. Oczywiście,

(1) $$\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1 \le \chi''(G) \le \chi'''(G)$$

dla każdego grafu płaskiego G. Łatwo zauważyć, że na podstawie oszacowania totalnej liczby chromatycznej mamy $\chi'''(G) \le \Delta(G)+1030$, ale istnieje przypuszczenie, że $\chi'''(G) \le \Delta(G)+4$. To hipotetyczne oszacowanie jest osiągalne przez K_4, co pokazano na rysunku 1.



Rys.1. Całkowite pokolorowanie grafu K_4

Wreszcie ostatnim zbiorem, który można kolorować w grafie są końcówki. *Końcówką* w G nazywamy taką parę (v,e), że wierzchołek v i krawędź e są incydentne. Końcówki (v,e) i (w,f) są sąsiednie, jeśli zachodzi jeden z warunków: (1) $v = w$, (2) $e = f$ lub (3) krawędź $vw = e$ lub $vw = f$. *Końcówkowa liczba chromatyczna* $\chi_I(G)$ to najmniejsza liczba kolorów dopuszczająca końcówkowe pokolorowanie grafu G. Rzecz jasna, $\Delta(G)+1 \le \chi_I(G) \le n$. Udowodniono, że $\chi_I(G) \le 2\Delta(G)$. Jednakże przypuszcza się, że zachodzi $\chi_I(G) \le \Delta(G)+2$. Znamy końcówkową liczbę chromatyczną niektórych grafów, np. dla drzew i grafów pełnych mamy $\chi_I(G) = \Delta(G)+1$. Ten model kolorowania znajduje zastosowanie w systemach transmisji bezprzewodowej. Rozważania nasze podsumowujemy w postaci tabeli 1.

Tabela 1. Górne oszacowania niezmienników chromatycznych.

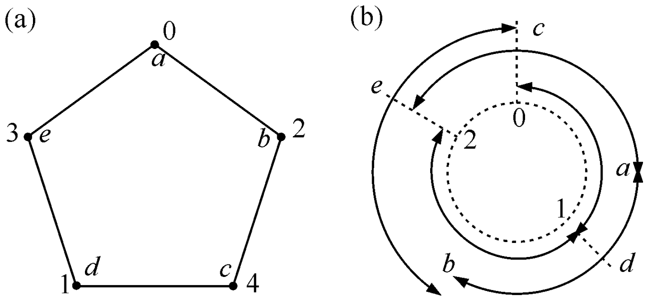
niezmiennik	oszacowanie hipotetyczne	oszacowanie udowodnione
$\chi(G)$		$\Delta(G)+1$
$\chi'(G)$		$\Delta(G)+1$
$\chi''(G)$	$\Delta(G)+2$	$\Delta(G)+1026$
$\chi'''(G)$*	$\Delta(G)+4$	$\Delta(G)+1030$
$\chi_S(G)$*		4
$\chi_I(G)$	$\Delta(G)+2$	$2\Delta(G)$

*dla grafów planarnych

3. Jak można traktować kolory

Oczywiście najczęściej traktuje się kolory jako liczby naturalne i przykład tego mieliśmy w poprzednim punkcie. Ale kolory mogą być traktowane jako łuki na okręgu i przedziały na osi czasu. Naszą dalszą analizę rozpoczynamy od kolorowania cyrkularnego.

Cyrkularne kolorowanie grafu jest naturalnym uogólnieniem zwykłego kolorowania, wprowadzonym przez Vince'a [14]. Formalnie, niech O_r oznacza okrąg długości r. Przez *cyrkularne pokolorowanie grafu* G z wykorzystaniem r kolorów rozumiemy funkcję φ, która przyporządkowuje każdemu wierzchołkowi v łuk otwarty $\varphi(v)$ o długości 1 na okręgu O_r, tak że dla dowolnych dwóch wierzchołków sąsiednich v_1 i v_2 łuki $\varphi(v_1)$ i $\varphi(v_2)$ są rozłączne. *Cyrkularną liczbę chromatyczną* $\chi_C(G)$ definiujemy jako najmniejszą wartość r, dla której istnieje cyrkularne pokolorowanie r kolorami grafu G. Pojęcie to zilustrowano na rysunku 2. Zaletą tego modelu jest potencjalna możliwość uzyskania pokolorowań „podchromatycznych", tj. takich, które używają mniej barw niż wynosi liczba $\chi(G)$.



Rys. 2. Cyrkularne kolorowanie cyklu:
(a) graf C_5; (b) pokolorowanie „2.5 kolorami"

Ogólnie, model kolorowania cyrkularnego może być użyteczny wszędzie tam, gdzie mamy do czynienia z systemem pracującym w ruchu ciągłym. Spektakularnym zastosowaniem cyrkularnego kolorowania wierzchołków jest sterowanie ruchem ciągłym na skrzyżowaniach z sygnalizacją świetlną, gdzie strumienie ruchu definiują wierzchołki, a konflikty między nimi – krawędzie.

Jeśli chodzi o kolorowanie wierzchołków, to wiadomo, że $\lceil \chi_C(G) \rceil = \chi(G)$ dla każdego G. Wynika z tego, że znalezienie optymalnego pokolorowania cyrkularnego jest NP-trudne. Drugi wniosek jest ten, że oszczędność modelu jest niewielka i wynosi niecały kolor. Cyrkularne kolorowanie krawędzi jest w istocie cyrkularnym kolorowaniem wierzchołków grafu krawędziowego, więc $\lceil \chi'_C(G) \rceil = \chi'(G)$. Wiadomo również, że zachodzą nierówności

$$\Delta(G) \le \chi'_C(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G) + 1 \tag{2}$$

Zatem dla grafów klasy 2 mamy $\Delta(G) < \chi'_C(G) \le \chi'(G) = \Delta(G)+1$. Powyższy ciąg nierówności prowadzi do naturalnego podziału klasy 2 na dwie podklasy: *podklasę 1.5*, w której $\chi'_C(G) < \chi'(G)$ i *podklasę 2.5*, w której $\chi'_C(G) = \chi'(G)$. Z praktycznego punktu widzenia ciekawa jest jedynie podklasa 1.5, gdyż tylko dla tych grafów cyrkularne kolorowanie krawędzi jest w stanie obniżyć liczbę użytych barw.

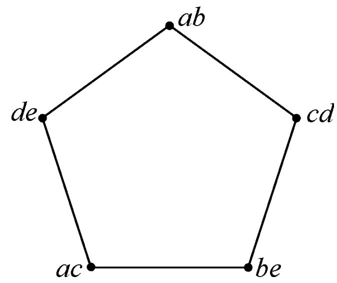
Cząstkowe kolorowanie grafu, zapoczątkowane przez Stahla [15], traktuje kolory jak poszatkowane przedziały na osi czasu. Innymi słowy, w modelu tym każdemu wierzchołkowi jest przydzielany zbiór kolorów w taki sposób, że wierzchołki połączone krawędzią nie mają wspólnych kolorów. Formalnie, niech będzie dany graf G i zbiór a różnych kolorów. Przez *b-multikolorowanie*, $b < a$, rozumiemy takie legalne pokolorowanie grafu G, że każdy wierzchołek otrzymuje podzbiór b kolorów. Najmniejsze takie a, że G jest b-multikolorowalny, oznaczamy przez $\chi_b(G)$. *Cząstkowa liczba chromatyczna* jest zdefiniowana następująco:

$$\chi_F(G) = \lim_{b\to\infty} \frac{\chi_b(G)}{b} \tag{3}$$

Łatwo zauważyć, że

$$\omega(G) \le \chi_F(G) \le \chi(G) \tag{4}$$

gdzie $\omega(G)$ jest rozmiarem największej kliki w G.



Rys. 3. Cząstkowe pokolorowanie C_5: a = (0,.5), b = (.5,1), c = (1,1.5), d = (1.5,2), e = (2,2.5)

Na rysunku 3 pokazujemy przykład cząstkowego pokolorowania cyklu C_5 „2.5 kolorami". Przykład ten można uogólnić na cykle nieparzyste, dla których $\chi_F(C_{2n+1}) = 2+1/n$. Znamy również cząstkową liczbę chromatyczną grafów Mycielskiego [16], dla których $\chi(G)/\chi_F(G) = O(\sqrt{n})$. Zatem, w odróżnieniu od kolorowania cyrkularnego, oszczędność tego modelu jest nieograniczona dla niektórych klas grafów.

Kolorowanie cząstkowe stoi pomiędzy kolorowaniem klasycznym i programowaniem liniowym. Problem ten jest NP-trudny w przypadku kolorowania wierzchołków i wielomianowy w przypadku kolorowania krawędzi. Ponadto, kolorowanie cząstkowe spełnia hipotezę o kolorowaniu totalnym (patrz tabela 1). Kolorowanie to ma zastosowania w szeregowaniu jednostkowych zadań podzielnych ma procesorach dedykowanych.

LITERATURA

[1] Zuckerman D.: Linear degree extractors and the inapproximability of Max Clique and Chromatic Number. *Proc. STOC'06*, Seattle, 2006, p. 681-690.
[2] Vizing V.G.: On an estimate of the chromatic class of a *p*-graph (po rosyjsku). *Diskret. Analiz*, vol.. 3, 1964, p. 25-30.
[3] Kubale M. i in.: Optymalizacja dyskretna. Modele i metody kolorowania grafów. *WNT*, Warszawa, 2002.
[4] Jensen T.R., Toft B.: Graph Coloring Problems. New York, *Wiley*, 1995.
[5] Appel K., Haken W.: Every planar graph is four colorable. Pt. I: Discharging. *Illinois J. Math.*, vol. 21, 1977, p. 429-490.
[6] Garey M.R., Johnson D.S., Stockmeyer L.: Some simplified NP-complete graph problems. *Theor. Comp. Sci.*, vol. 1, 1976, p. 237-267.
[7] Kubale M.: Problem kolorowania wierzchołków grafów. Przegląd algorytmów i zastosowań. *ZNPŚl., Ser. Automatyka*, vol. 114, 1994, s. 187-198.
[8] Brooks R.L.: On colouring the nodes of a network. Proc. *Cambridge Philos. Soc.*, vol. 37, 1941, p. 194-197.
[9] Halldórsson M.M.: A still better performance guarantee for approximate graph coloring, *Inf. Process. Lett.*, vol. 45, 1993, p. 19-23.
[10] Brélaz D.: New methods to color the vertices of a graph. *Comm. ACM*, vol. 22,1979, p. 251-256.
[11] Tait P.G.: On the coloring of maps. Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sec. A, vol. 10, 1880, p. 501-503.

[12] Erdös P., Wilson R.J.: On the chromatic index of almost all graphs, *J. Combinat. Theory, Ser. B*, vol. 23, 1977, p. 255-257.
[13] Kubale M.: Problem kolorowania krawędzi grafów. Przegląd algorytmów i zastosowań. *ZNPŚl., Ser. Automatyka*, vol. 117, 1996, s. 203-212.
[14] Vince A.: Star chromatic number. *J. Graph Theory*, vol. 12, 1989, p. 551-559.
[15] Stahl S.: n-tuple colorings and associated graphs. *J. Combinat. Theory, Ser. B*, vol. 20, 1976, 185-203.
[16] Mycielski J.: On the coloring of graphs. *Coll. Math.*, vol. 3, 1955, p. 161-162.

***Autor**: prof. dr hab. inż. Marek Kubale, Politechnika Gdańska, Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki, Katedra Algorytmów iI Modelowania Systemów, ul. Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk, e-mail: kubale@eti.gda.pl;*