

Modele i metody kolorowania grafów. Część II

Streszczenie. Niniejszy artykuł jest drugą częścią 2-odcinkowego cyklu przeglądowego na temat modeli i metod kolorowania grafów. Przedstawiono w nim najważniejsze, z punktu widzenia zastosowań, modele kolorowania grafów. W szczególności pokazano różne kryteria i ograniczenia modyfikujące kolorowanie klasyczne. Ponieważ kolorowanie we wszystkich tych odmianach i wariantach jest NP-trudne, podano oszacowania na liczbę chromatyczną (indeks chromatyczny) oraz podano potencjalne zastosowania rozważanych modeli w problemach naukowo-technicznych.

Abstract. This is the second of a couple of review papers on models and methods of graph coloring. We present herein the main models of graph coloring from a practical point of view. In particular, we show various criteria and modifications of classical coloring model. Since graph coloring is NP-hard in various modifications and variants, we give simple bounds on the chromatic number (chromatic index) as well as we give potential applications of the chromatic methods in science and technology. (**Models and methods of graph coloring – part II**).

Słowa kluczowe: kolorowanie grafu, liczba chromatyczna, indeks chromatyczny, NP-trudność, algorytm wielomianowy

Keywords: graph coloring, chromatic number, chromatic index, NP-hardness, polynomial algorithm

Wstęp

Problemy kolorowania grafów należą do najtrudniejszych problemów kombinatorycznych w sensie złożoności obliczeniowej. Wykazano, że skonstruowanie algorytmu aproksymacyjnego o poliogarytmicznej funkcji dobroti jest NP-trudne, chyba że $P = NP$ [1]. Z tego względu jednym z kluczowych zagadnień teorii kolorowania grafów jest określenie granicy pomiędzy przypadkami obliczeniowo łatwymi, tj. wielomianowymi, które tworzą klasę P oraz trudnymi, czyli tzw. NP-zupełnymi (NPC). Zagadnienia te są ściśle związane z naczelnym problemem współczesnej informatyki teoretycznej, jakim jest pytanie milenijne o to, czy $P = NP$.

Najczęściej w problemie kolorowania grafów bada się dwa zagadnienia: kolorowanie wierzchołków i kolorowanie krawędzi. Mimo że oba zagadnienia są NP-trudne, kolorowanie krawędzi jest łatwiejsze z punktu widzenia możliwości skonstruowania efektywnych algorytmów aproksymacyjnych. Jest tak dlatego, ponieważ w przypadku kolorowania krawędzi zachodzi twierdzenie Vizinga [2] mówiące, że wartość indeksu chromatycznego grafu prostego G nie przekracza nigdy $\Delta + 1$, gdzie $\Delta = \Delta(G)$ jest stopniem grafu G .

W pierwszej części pracy [3] pokazaliśmy, że w grafie koloruje się nie tylko wierzchołki bądź krawędzie, ale i tzw. końcówki oraz ściany, o ile graf jest płaski. Ponadto pokazaliśmy, że są różne sposoby traktowania kolorów: np. można je łączyć, dzielić, zawiązać itp. Innymi słowy w pierwszej części niniejszego cyklu przeglądowego skoncentrowaliśmy się na odpowiedzi na pytanie: co można kolorować w grafie i jak można traktować kolory. Obecnie pokażemy, że są różne modele i kryteria kolorowania. Innymi słowy, dokonamy przeglądu najbardziej popularnych i użytecznych modeli kolorowania grafów. Większość z nich dotyczy zarówno kolorowania wierzchołków jak i krawędzi, ale niektóre z nich określone są wyłącznie dla wierzchołków bądź wyłącznie dla krawędzi. Ponadto, większość z nich prowadzi do pokolorowań legalnych w tym sensie, że są to uogólnienia kolorowania klasycznego, ale niektóre są nielegalne (np. kolorowanie tęczowe). W niniejszej pracy ograniczymy się do tych pierwszych. Dlatego zwykła liczba chromatyczna będzie zawsze dolnym ograniczeniem na wartości odpowiednich niezmienników grafowych.

Problem kolorowania grafów ma długą, ponad 160-letnią historię, wiele zastosowań oraz kilkaset problemów otwartych. W książce [4] znaleźć można między innymi zręby tej historii oraz ponad 20 zastosowań praktycznych problemu kolorowania wierzchołków i krawędzi grafu, natomiast w książkach [5,6] znajdziemy opis ponad 200

problemów otwartych w obszarze analizy chromatycznej grafów.

Przegląd modeli kolorowania

Sprawiedliwe kolorowanie grafów

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem mającym n wierzchołków i m krawędzi. Jeżeli wierzchołki grafu G można podzielić na k klas V_1, V_2, \dots, V_k , takich że każde V_i jest zbiorem wierzchołków niezależnych oraz $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ dla wszystkich $i \neq j$, to mówimy, że graf G jest *sprawiedliwie kolorowalny k kolorami*. Najmniejszą liczbę k dopuszczającą sprawiedliwe kolorowanie wierzchołków grafu G nazywamy *sprawiedliwą liczbą chromatyczną* i oznaczamy $\chi_=(G)$. Ten model kolorowania został zaproponowany przez Meyera [7].

Łatwo udowodnić, że wyznaczenie wartości $\chi_=(G)$ jest tak samo trudne jak wyznaczenie wartości liczby chromatycznej $\chi(G)$. W istocie, uzupełnimy graf G odpowiednią liczbą wierzchołków izolowanych. Wówczas nowy graf będzie miał te same liczby chromatyczne równe $\chi(G)$. Zatem rozważany problem jest NP-trudny. Nie znamy takich klas grafów, dla których nasz problem byłby istotnie trudniejszy od problemu klasycznego. Jedyna różnica w złożoności polega na tym, iż dla niektórych klas grafów rozwiązania wielomianowe nie są znane, mimo że klasy te są wielomianowo kolorowalne w sensie klasycznym.

Problem sprawiedliwego kolorowania wierzchołków grafu, lub inaczej podziału zbioru zawierającego konflikty na równoliczne zbiory bezkonfliktowe, ma zastosowania w niektórych problemach szeregowania zadań, np. układaniu rozkładów zajęć. W tym przypadku wierzchołki odpowiadają zajęciom, krawędzie – konfliktom czasowym między nimi, zaś kolory odpowiadają kolejnym godzinom dydaktycznym. Problem polega na ułożeniu najkrótszego harmonogramu spełniającego dodatkowo ograniczenia lokalowe, czyli znalezieniu możliwie sprawiedliwego (równomiernego) pokolorowania grafu.

Skoro problem jest NP-trudny, to zmuszeni jesteśmy korzystać z ograniczeń na wartość $\chi_=(G)$. Trywialne oszacowania są następujące:

$$(1) \quad \chi(G) \leq \chi_=(G) \leq \Delta + 1$$

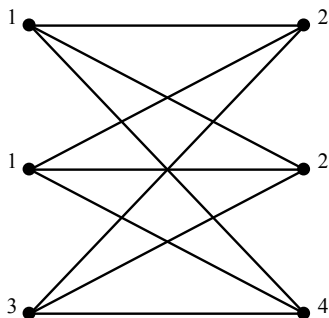
Jeżeli $N(v)$ oznacza domknięte sąsiedztwo wierzchołka v , zaś $\alpha(G)$ – rozmiar największego zbioru niezależnego w G , to oszacowanie dolne z (1) można poprawić do postaci

$$(2) \quad \left\lceil \frac{n+1}{\alpha(G - N(v)) + 2} \right\rceil \leq \chi_=(G)$$

Z drugiej strony, istnieje hipoteza ECC (*Equitable Coloring Conjecture*) sformułowana przez Meyera [7]

mówiąca, że jeżeli G nie jest cyklem nieparzystym, ani grafem pełnym, to $\chi_-(G) \leq \Delta$. Hipoteza ta została udowodniona dla licznych klas grafów.

Zauważmy, że jeżeli G jest sprawiedliwie k -kolorowalny, to nie znaczy, że jest on również $(k+1)$ -barwny. Przykładem jest pełny graf dwudzielny $K_{3,3}$, który jest sprawiedliwie 2-barwny i 4-barwny ale nie 3-barwny, co zilustrowano na rysunku 1. Prowadzi to nas do kolejnej hipotezy EACC (*Equitable Δ -Coloring Conjecture*) mianowicie: spójny graf G jest sprawiedliwie Δ -kolorowalny, jeżeli jest różny od K_m , C_{2m+1} , $K_{2m+1,2m+1}$ dla każdego $m \geq 1$. Hipoteza ta jest silniejsza od hipotezy ECC.



Rys. 1. Graf $K_{3,3}$ i jego sprawiedliwe 4-kolorowanie

Wielomianowe algorytmy dla sprawiedliwego kolorowania grafów znane są m. in. dla drzew, grafów zewnętrznie planarnych i split grafów. W przypadku ogólnym mamy dwa algorytmy heurystyczne dla kolorowania sprawiedliwego: *Naiwny* i *TwórzPodgraf*, oba o złożoności $O(n^4)$. Polegają one na zwykłym pokolorowaniu grafu, a następnie na próbie jego zrównoważenia [4]. Inny algorytm gwarantujący użycie co najwyżej Δ kolorów (chyba, że $G = C_{2m+1}$ lub K_m) podano ostatnio w [8].

Sprawiedliwe kolorowanie krawędzi polega na legalnym przyporządkowaniu krawędziom kolorów z warunkiem dla krotności kolorów podobnym do tego, jaki był przy kolorowaniu wierzchołków. W tym przypadku zamiast o sprawiedliwej liczbie chromatycznej będziemy mówili o *sprawiedliwym indeksie chromatycznym* grafu G , który oznaczamy przez $\chi'_-(G)$.

Model ten jest ściśle związany z klasycznym kolorowaniem krawędzi. Sprawiedliwe pokolorowanie krawędzi grafu otrzymujemy z dowolnego zwykłego pokolorowania. Jeżeli kolorowanie krawędzi nie jest sprawiedliwe, to musimy zmienić kolory wzdłuż ścieżek o nieparzystej długości, utworzonych z dwóch kolorów – najczęściej i najbardziej występującego. Zatem

$$(3) \quad \chi(G) \leq \chi'_-(G) \leq \Delta + 1$$

Jak wiadomo, klasyczne kolorowanie krawędzi jest problemem NP-trudnym. Stąd wynika NP-trudność sprawiedliwego kolorowania krawędzi. Znany jest algorytm wielomianowy, który pozwala na klasyczne pokolorowanie każdego grafu prostego G co najwyżej $\Delta+1$ kolorami. Gdy kolorowanie to nie jest sprawiedliwe, musimy je „usprawiedliwić”, jak wyżej. Tak usprawiedliwiony algorytm nie jest optymalny w sensie liczby użytych kolorów. W niektórych przypadkach daje pokolorowanie $\Delta+1$ barwami grafu, mimo że $\chi'_-(G) = \Delta$. Zatem możemy sprawiedliwie pokolorować krawędzie każdego grafu, wykorzystując co najwyżej $\Delta+1$ barw.

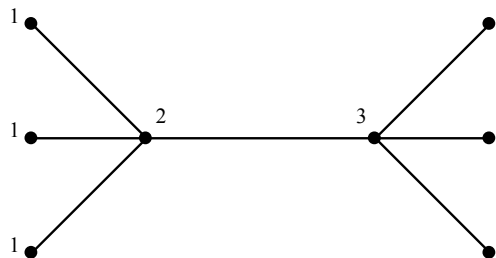
Sumacyjne kolorowanie grafów

O ile w przypadku liczby chromatycznej istotna jest liczba użytych kolorów (etykiety) przyporządkowanych wierzchołkom (krawędziom), to w przypadku sumy

chromatycznej istotne są własności algebraiczne etykiet (liczb naturalnych). Pojęcie sumy chromatycznej zostało wprowadzone przez Kubicką i Schwenka [9].

Bardziej formalnie, niech będzie dany graf G i jego legalne pokolorowanie wierzchołkowe c . *Sumą pokolorowania c* nazywamy wartość $\Sigma c(v)$, gdzie dodawanie jest rozciągnięte na wszystkie wierzchołki grafu G . Najmniejszą wartość sumy pokolorowania spośród wszystkich możliwych pokolorowań grafu G nazywamy (*wierzchołkową*) *sumą chromatyczną* grafu G i oznaczamy przez $\chi_\Sigma(G)$.

Wydawać by się mogło, iż w celu osiągnięcia sumy chromatycznej wystarczy optymalnie (chromatycznie) pomalować dany graf. Tak jednak nie jest. Na rysunku 2 podajemy przykład drzewa, dla którego obniżenie sumy pokolorowania wymaga wprowadzenia trzeciego koloru.



Rys. 2. Drzewo T , dla którego $\chi_\Sigma(T) = 11$

Problem optymalnego kolorowania grafu w sensie sumy chromatycznej jest NP-trudny. W istocie jest trudniejszy od klasycznego kolorowania, gdyż pozostaje NP-trudny dla grafów dwudzielnych, przedziałowych i split grafów. Dlatego często posługujemy się oszacowaniami na wartość $\chi_\Sigma(G)$. Najprostsze z nich mówi, że wartość ta nie przekracza $n+m$. Nierówność ta wynika z zastosowania algorytmu SL do kolorowania wierzchołków grafu [4]. Okazuje się bowiem, że każdy wierzchołek v_i $i = 1, \dots, n$ w takim kolorowaniu dostaje barwę o wartości $d(v_i)+1$, gdzie $d(v_i)$ jest stopniem zredukowanym wierzchołka v_i . Zatem łącznie $\chi_\Sigma(G) \leq \Sigma(d(v_i)+1) = n + \Sigma d(v_i) = n+m$.

Bardziej precyzyjne oszacowania są następujące:

$$(4) \quad \sqrt{8m} \leq \chi_\Sigma(G) \leq 3(m+1)/2$$

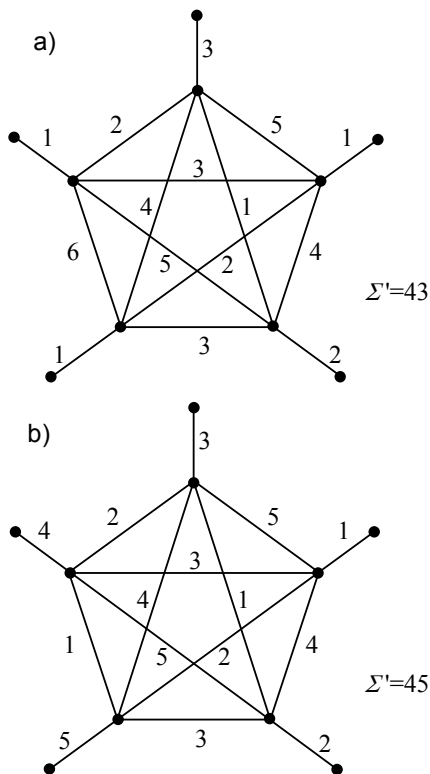
Zastosowania problemu sumacyjnego kolorowania wierzchołków sięgają dedykowanego szeregowania zadań jednostkowych oraz projektowania ścieżek w układach scalonych VLSI [4]. W pierwszym przypadku celem szeregowania jest minimalizacja średniego czasu przepływu zadań przez system, co w języku kolorowania oznacza wyznaczenie sumy chromatycznej odpowiedniego grafu szeregowania. To kryterium oznacza zminimalizowanie średniego czasu oczekiwania zadania na obsłudze. A więc jest to kryterium szeregowania, które dba o interes zadań. W drugim przypadku minimalizujemy koszt trasowania połączeń w 2-warstwowym układzie scalonym.

Analogicznie definiujemy sumacyjne kolorowanie krawędzi. Problem taki jest jak zwykle NP-trudny, ale istnieje algorytm zachłanny, który w czasie wielomianowym gwarantuje pokolorowanie krawędzi z sumą nie większą w dwójnasób od krawędziowej sumy chromatycznej. Problem jest istotnie trudniejszy od problemu klasycznego, gdyż pozostaje NP-trudny w przypadku grafów dwudzielnych.

Niekiedy w celu obniżenia wartości sumy pokolorowania krawędzi należy wprowadzić jedną nową barwę. Przykład takiej sytuacji ilustrujemy na rysunku 3.

Zastosowania problemu sumacyjnego kolorowania krawędzi dotyczą przypadków użycia klasycznego kolorowania krawędzi grafu. Wymienimy tutaj tylko dwa

przypadki. W pierwszym szeregujemy transmisje plikowe w sieci komputerowej, w której każda transmisja wymaga jednoczesnego zaangażowania dwóch węzłów: nadającego i odbierającego. W drugim szeregujemy dwuprocesorowe testy diagnostyczne w systemie wieloprocesorowym, polegające na jednoczesnym wykonaniu tego samego programu diagnostycznego przez oba węzły i porównaniu wyników pośrednich. Jak poprzednio, celem takiego szeregowania jest minimalizacja średniego czasu przepływu zadań przez system.

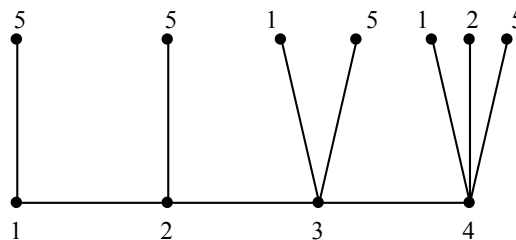


Rys. 3. Sumacyjne kolorowanie krawędzi: a) optymalne 6-kolorowanie; b) suboptymalne 5-kolorowanie

Harmoniczne kolorowanie wierzchołków

Harmoniczne k -kolorowanie grafu jest takim legalnym pokolorowaniem jego wierzchołków przy użyciu łącznie k barw, w którym każda para barw pojawia się co najwyżej raz na końcach krawędzi. Najmniejszą liczbę k dopuszczającą takie pokolorowanie grafu G nazywamy jego *harmoniczną liczbę chromatyczną* i oznaczamy przez $\chi_H(G)$. Zauważmy, że tak określony problem kolorowania nie ma swego odpowiednika w kolorowaniu krawędzi. Ten typ kolorowania wprowadził Frank i in. [10]. Przykład kolorowania harmonicznego zawiera rysunek 4.

Problem optymalnego kolorowania grafu w sensie liczby harmonicznej jest NP-trudny. Rzeczywiście, przypuśćmy, że chcemy wiedzieć czy n -wierzchołkowy graf H ma zbiór niezależny o rozmiarze co najmniej r , co jest problemem NP-zupełnym. Konstruujemy grafy G' i G'' . G' jest grafem powstałym z H w wyniku wprowadzenia nowego wierzchołka połączonego ze wszystkimi wierzchołkami grafu H . Zatem $\chi_H(G') = n+1$. G'' jest po prostu K_r . Jeśli H ma zbiór niezależny o rozmiarze r , to wierzchołki tego zbioru w G' mogą być ubarwione kolorami $1, \dots, r$, pozostałe kolorami $r+1, \dots, n+1$, zaś wierzchołki K_r ponownie mogą otrzymać r pierwszych barw i pomalowanie to jest harmoniczne. W istocie problem określenia wartości $\chi_H(G)$ jest NP-trudny nawet wówczas, gdy G jest drzewem. Jest to jeden z nielicznych problemów grafowych, które pozostają NP-trudne dla drzew.



Rys. 4. Graf z $\chi_H(G) = 5$

Ponieważ ten model kolorowania implikuje NP-trudność, więc często dla wyznaczenia wartości $\chi_H(G)$ posługujemy się oszacowaniami. Przegląd tych oszacowań rozpoczynamy od oczywistej nierówności $\chi(G) \leq \chi_H(G)$. Niestety oszacowanie to może być kiepskie np. dla gwiazd. Lepszym jest $\Delta+1 \leq \chi_H(G)$. Kolejnym oszacowaniem dolnym godnym uwagi jest

$$(5) \quad \sqrt{2m} < \chi_H(G)$$

Nierówność tę uzyskujemy wyznaczając $2m$ z zależności $\chi_H(G)(\chi_H(G)-1)/2 \geq m$, która wynika z faktu, że musi być przynajmniej tyle par kolorów, ile jest krawędzi. Z drugiej strony wiemy, że

$$(6) \quad \chi_H(G) \leq 2\Delta\sqrt{n}$$

Oprócz wyżej zaprezentowanych oszacowań istnieją jeszcze inne górne oszacowania harmonicznej liczby chromatycznej grafów ogólnych, lecz prowadzą one do skomplikowanych formuł matematycznych.

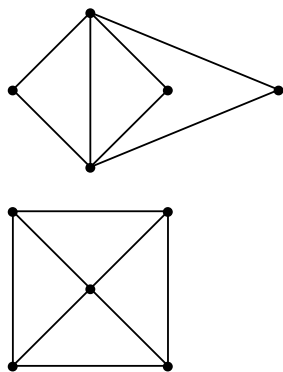
Skoro kolorowanie harmoniczne jest NP-trudne, to do takiego kolorowania i górnego szacowania liczby harmonicznej warto pokusić się o zaprojektowanie algorytmu heurystycznego o wielomianowej złożoności i gwarantowanej dokładności względnej. Istnieje kilka algorytmów specjalnych dla kolorowania grafów silnie ustrukturalizowanych – bardzo gęstych lub bardzo rzadkich. Ale nam potrzebny jest algorytm uniwersalny. Heurystyką taką jest algorytm 2-aproksymacyjny o nazwie *Degresywny* i złożoności $O(n^4)$ [4].

Potencjalne zastosowania tego modelu dotyczą radio-komunikacji lotniczej, kompresji obrazów i projektowania funkcji mieszających [4].

Zwarte kolorowanie krawędzi

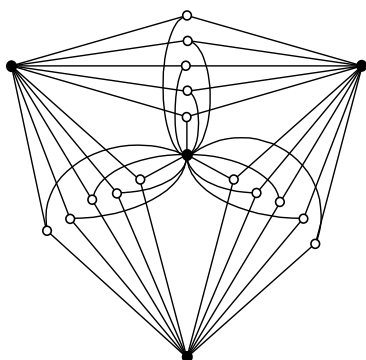
Zwarte kolorowanie krawędzi grafów stanowi szczególnie model kolorowania krawędziowego za pomocą liczb naturalnych, w którym poza standardową zasadą legalności (kolory krawędzi sąsiednich są różne) wymagamy dodatkowo warunku zwartości. Mówi on, iż kolory krawędzi spotykających się przy jednym wierzchołku muszą tworzyć zwarty przedział (złożony z kolejnych liczb naturalnych). Ten model kolorowania po raz pierwszy wystąpił w pracach Asratiana i Kamaliana [11]. Niestety nie wszystkie grafy można pomalować w ten sposób, a najprostszym przykładem są cykle nieparzyste. Okazuje się, że wszystkie grafy klasy 2 (tj. $(\Delta+1)$ -chromatyczne) są takimi kontrprzykładami. Jeżeli graf G dopuszcza takie kolorowanie, to najmniejszą liczbę kolorów, przy której można jeszcze pomalować jego krawędzie w sposób zwarty nazwiemy *zwartym indeksem chromatycznym* i oznaczmy $\chi'_Z(G)$.

Również niektóre grafy klasy 1 (tj. Δ -chromatyczne) nie są zwarcie kolorowane. Dwa najmniejsze z nich pokazane są na rysunku 5. Co ciekawe, nawet niektóre grafy dwudzielne nie mają tej własności. Najmniejszym takim grafem jest 19-wierzchołkowa rozeta Małafiejskiego [4], pokazana na rysunku 6. Z drugiej strony wszystkie grafy dwudzielne o liczbie wierzchołków $n \leq 14$ są zwarcie kolorowalne.



Rys. 5. Najmniejsze grafy klasy 1 bez zwartego pokolorowania

W odróżnieniu od kolorowania klasycznego problem istnienia pokolorowania zwartego jest NP-zupełny nawet wówczas, gdy G jest dwudzielny. Z drugiej strony znamy algorytmy wielomianowe dla następujących podklas grafów dwudzielnych: drzew, regularnych, pełnych, podkubicznych i zewnętrznie planarnych. Zatem grafy dwudzielne są blisko granicy rozdzielającej klasy P i NPC.



Rys. 6. Rozeta Małafiejskiego

Jeśli chodzi o górne oszacowania wartości $\chi'_Z(G)$, oczywiście w tych przypadkach gdy pokolorowanie zwarte istnieje, to

$$(7) \quad \chi'_Z(G) \leq (\text{diam}(G)+1)(\Delta-1)+1$$

gdzie $\text{diam}(G)$ jest średnicą kolorowanego grafu. Kolejne oszacowanie dotyczy grafów G o co najmniej 3 wierzchołkach, mianowicie

$$(8) \quad \chi'_Z(G) \leq 2n-4$$

Oszacowanie to można poprawić dla grafów beztrojkatowych, ponieważ mamy dla nich nierówność $\chi'_Z(G) \leq n-1$.

Zastosowania tego modelu kolorowania grafów wynikają z potrzeb szeregowania zadań w systemach nie dopuszczających przerw w pracy, tj. typu *no-wait* oraz *no-idle* (np. [12]). Jako przykład rozważmy szkołę, dla której przygotowujemy plan zajęć, zamodelowany w postaci grafu dwudzielnego: wierzchołki obu partycji stanowią odpowiednio klasy i nauczyciele, zaś krawędzie między nimi symbolizują konieczność przeprowadzenia pewnej lekcji przez danego nauczyciela. Wówczas harmonogram to nic innego jak kolorowanie krawędziowe tak powstałego grafu liczbami naturalnymi, oznaczającymi kolejne godziny lekcyjne. Warunek szeregowania bez okienek po obu stronach, tj. dla klas i nauczycieli, oznacza teraz, iż numery kolorów użytych na krawędziach incydentnych do każdego wierzchołka naszego grafu muszą tworzyć przedziały zwarte.

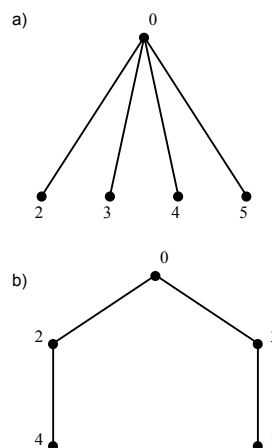
Tematem ściśle związanym ze zwartym kolorowaniem krawędzi jest deficytowość grafów. Jest ona pewną miarą

„niezwartości” grafu. Aby ją zdefiniować formalnie, wprowadzimy wpieryw pojęcie deficytowości podzbioru liczb naturalnych A . Wynosi ona $d(A) = \max A - \min A - |A| + 1$. Zatem skończony podzbiór liczb naturalnych jest zwartym przedziałem wtedy i tylko wtedy, gdy jego deficytowość wynosi 0. Dla danego grafu G i jego krawędziowego pokolorowania c oraz dla wierzchołka v przez deficytowość pokolorowania c przy wierzchołku v rozumiemy deficytowość zbioru numerów uzyskanych w funkcji c przez wszystkie krawędzie incydentne do v . Deficytowość pokolorowania c definiujemy jako sumę deficytowości we wszystkich wierzchołkach i oznaczamy $d(G,c)$. Deficytowość grafu G , czyli $d(G)$, to minimum $d(G,c)$ po wszystkich możliwych pokolorowaniach krawędziowych c grafu G . Zatem w myśl powyższej definicji grafy zwarcie kolorowalne to dokładnie te, których deficytowość wynosi 0. Znamy deficytowość niektórych klas grafów, np. cykli, kół i grafów pełnych. Ogólnie można powiedzieć, że $d(G) < (n-1)^2$, ale oszacowanie to wydaje się bardzo zgrubne. Jak dotąd nie wiadomo czy $d(G)$ daje się przedstawić jako funkcja rzędu $O(n)$, ani nie jest znany żaden przypadek grafu o deficytowości przekraczającej n . Jedyny przypadek algorytmu usiłującego pomalować graf ogólny przy najmniejszej możliwej deficytowości jest heurystyka tabu serach podana przez Boucharda i in. [13]. Inną miarę niezwartości, tzw. odporność grafu, zaproponowali Petrosyan i Sargsyan w [14].

L(2,1) kolorowanie grafu

$L(2,1)$ kolorowanie jest jednym z modeli należących do tzw. radiokolorowania grafu. Należą do niego: T -kolorowanie, kolorowanie antypodalne, kolorowanie szkieletowe i inne. Kolorowanie $L(2,1)$ polega na takim przydziale kolorów ze zbioru $0, \dots, \lambda$ do wierzchołków grafu G , że wierzchołki będące w odległości 2 mają różne kolory, zaś wierzchołki w odległości 1 (czyli sąsiednie) mają kolory różniące się o co najmniej 2. Najmniejszą liczbę λ umożliwiającą takie poetykietowanie wierzchołków oznaczamy przez $\chi_L(G)$. Problem wprowadzili do teorii grafów Griggs i Yeh [15].

Problem $L(2,1)$ kolorowania jest NP-trudny i pozostaje takim w klasie grafów dwudzielnych i split grafów. Z drugiej strony znamy algorytmy wielomianowe dla drzew i hiperkostek.



Rys. 7. Dwa drzewa 5-wierzchołkowe: a) z $\chi_L(T) = \Delta+1$, b) z $\chi_L(T) = \Delta+2$

Oczywiście, $\chi_L(G) \geq \Delta+1$. Ciekawa jest historia kolorowania drzew. Griggs i Yeh [15] udowodnili, że $\chi_L(T) \leq \Delta+2$ i przypuścili, iż rozstrzygnięcie, czy dla danego drzewa T zachodzi $\chi_L(T) = \Delta+1$, czy $\chi_L(T) = \Delta+2$ jest NP-zupełne (por. rys. 7). Cztery lata później obalono tę hipotezę, a obecnie potrafimy kolorować drzewa optymalnie w czasie liniowym. Jeszcze ciekawsza jest historia poprawiania

górnego ograniczenia na liczbę λ . Griggs i Yeh [15] udowodnili, że $\chi_L(G) \leq \Delta^2 + 2\Delta$. Wynik ten był poprawiany 5 razy. Dzisiaj obowiązuje oszacowanie

$$(9) \quad \chi_L(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 2$$

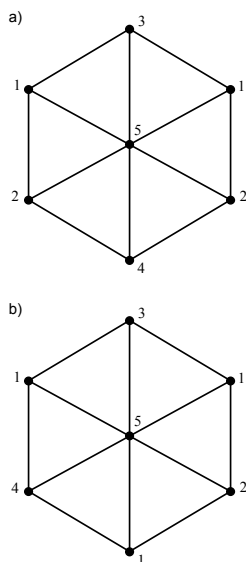
Przypuszcza się, że $\chi_L(G) \leq \Delta^2$. Wynik ten został potwierdzony dla wszystkich grafów o $\Delta \geq 10^{69}$.

Zastosowania modelu $L(2,1)$ kolorowania są takie same jak dla całej klasy problemów radiokolorowania grafu i dotyczą problemu przydziału częstotliwości roboczych do stacji radiowych. Mianowicie, przyjmuje się, że na pewnym terenie rozlokowane są takie stacje, którym odpowiadają wierzchołki grafu. Jeżeli dwie stacje są w bliskiej odległości powodującej ich wzajemne zakłócanie się, to uważamy, że są one połączone krawędzią. Wówczas należy im przydzielić częstotliwości odpowiednio odległe (w naszym modelu różniące się co najmniej o 2). Jeżeli natomiast ich odległość wynosi 2, to należy im przydzielić częstotliwości różniące się co najmniej o 1. W przypadku bardziej odległych stacji kolory mogą się powtarzać. Wówczas λ jest szerokością użytego pasma.

Istnieje bardzo niewiele algorytmów uniwersalnych dla $L(2,1)$ kolorowania grafu. Ostatnio pokazano, że pokolorowanie optymalne można wyznaczyć przy wielomianowej złożoności pamięciowej.

Uporządkowane kolorowanie grafu

Ostatnim rozważanym modelem jest kolorowanie uporządkowane zwane też rankingowym. *Uporządkowane k -kolorowanie wierzchołków grafu* jest przypisaniem liczb naturalnych $1, \dots, k$ do wierzchołków grafu w taki sposób, że jeżeli dwa wierzchołki u, v otrzymały ten sam kolor c , to każda ścieżka pomiędzy u i v zawiera wierzchołek z kolorem większym niż c . Najmniejsze k , przy którym G ma uporządkowane k -kolorowanie wierzchołków nazywamy *uporządkowaną liczbą chromatyczną* i oznaczamy $\chi_U(G)$. Po raz pierwszy problemem tym zajmował się Schreiber [16] w kontekście przetwarzania macierzy rozrzedzonych. Na rys. 8 podajemy przykłady kolorowania uporządkowanego.



Rys. 8. Dwa optymalne pokolorowania uporządkowane koła W_7

Problem uporządkowanego kolorowania jest NP-trudny i, w odróżnieniu od kolorowania klasycznego, pozostaje takim dla grafów dwudzielnych i dopełnień grafów dwudzielnych. Z drugiej strony jest on wielomianowo rozwiązywalny np. dla drzew i grafów przedziałowych. Co ciekawe, problem pozostaje wielomianowy w przypadku grafów łuków, mimo że klasyczne kolorowanie takich grafów jest NP-trudne. Istnieje algorytm wielomianowy gwarantujący roz-

wiązanie przybliżone z dokładnością względną $O(\log^2 n)$. Dowodzi się, że jeżeli $h(G)$ jest wysokością najniższego drzewa eliminacji grafu G , to $\chi_U(G) = h(G) + 1$.

Problemu uporządkowanego kolorowania wierzchołków znajduje zastosowania w projektowaniu układów VLSI i rozwiązywaniu układów równań liniowych metodą faktoryzacji.

Uporządkowane k -kolorowanie krawędzi jest takim kolorowaniem krawędzi grafu, że każda ścieżka pomiędzy dwiema krawędziami o tym samym kolorze c zawiera krawędź pomalowaną barwą $d > c$. Najmniejsze k , przy którym G ma uporządkowane k -kolorowanie krawędzi nazywamy *uporządkowanym indeksem chromatycznym* i oznaczmy przez $\chi'_U(G)$.

Problem uporządkowanego kolorowania krawędzi jest NP-trudny dla grafów dwudzielnych, ale staje się wielomianowy dla pełnych grafów dwudzielnych. Podobnie istnieje wielomianowy (liniowy) algorytm dla drzew.

Wartość uporządkowanego indeksu chromatycznego spełnia nierówność

$$(10) \quad \Delta \leq \chi'_U(G) \leq \log_2 \text{diam}(G) + 1$$

Zastosowania problemu uporządkowanego kolorowania krawędzi sięgają zagadnień związanych z efektywną lokalizacją błędów w programach modułowych o strukturze drzewiastej, planowaniem operacji montażowych wykonywanych przez roboty i obsługą zapytań w relacyjnej bazie danych [4].

Projekt został częściowo sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2011/02/A/ST6/00201 oraz N N519 405837.

LITERATURA

- [1] Zuckerman D., Linear degree extractors and the inapproximability of Max Clique and Chromatic Number. *Proc. STOC'06 Conf.*, Seattle (2006), 681-690
- [2] Vizing V.G., On an estimate of the chromatic class of a p -graph (po rosyjsku). *Diskret. Analiz*, 3 (1964), 25-30
- [3] Kubale M., Modele i metody kolorowania grafów. Część I, *Przegląd Elektrotechniczny*, 86 (2010), 115-117
- [4] Kubale M. i in., *Optymalizacja dyskretna. Modele i metody kolorowania grafów*. WNT, Warszawa (2002)
- [5] Jensen T.R., Toft B., *Graph Coloring Problems*, New York, Wiley (1995)
- [6] Chartrand G. Zhang P., *Chromatic Graph Theory*. Chapman and Hall, Boca Raton (2009)
- [7] Meyer W., Equitable coloring, *Amer. Math. Monthly*, 80 (1973), 920-928
- [8] Kierstead H.A., Kostochka A.V., Mydlarz M., Szemerédi E., A fast algorithm for equitable coloring. *Combinatorica*, 30 (2010), 217-224
- [9] Kubicka E., Schwenk A.J., An introduction to chromatic sums, *Proc. Annual ACM Comp. Sci. Conf.* (1989), 39-45
- [10] Frank O., Harary F., Planthold M., The line-distinguishing chromatic number of a graph, *Ars Combin.*, 14 (1982), 241-252
- [11] Asratian A., Kamalian R., Investigation on interval edge-colorings of graphs. *J. Combin. Theory. Ser. B*, 62 (1994), p. 34-43
- [12] Giaro K., Kubale M., Małafiejski M., Compact scheduling in open shop with zero-one time operations, *INFOR*, 37 (1999), 37-47
- [13] Bouchard M., Hertz A., Desaulniers G., Lower bounds and tabu search algorithm for minimum deficiency problem, *J. Combin. Optimiz.*, 17 (2009), 168-191
- [14] Petrosyan P.A., Sargsyan H.E., On resistance of graphs, *Disc. Appl. Math.*, 159 (2011), 1889-1900
- [15] Griggs J.R., Yeh R.K., Labelling graphs with a condition at distance 2, *SIAM J. Disc. Math.*, 5 (1992), 586-595.
- [16] Schreiber R., A new implementation of sparse Gaussian elimination, *ACM Trans. Math. Software*, 8 (1982), 256-276

Autor: prof. dr hab. inż. Marek Kubale, Politechnika Gdańska, Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki, ul. Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk, E-mail: kubale@eti.pg.gda.pl.