• Przestrzeń liniowa. Podprzestrzeń

Niech $X_i \subset X$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, oznacza rodzinę podzbiorów przestrzeni liniowej X.

Przez **sumę algebraiczną** tych podzbiorów rozumie się zbiór

$$\sum_{i=1}^{k} X_i =$$

$$\left\{ a \in X \ : \ a = \sum_{i=1}^{k} a_i,\ a_i \in X_i,\ i \in \{1, \ldots, k\} \right\}.$$

Niech X będzie przestrzenią liniową.

Podzbiór $X_0 \subset X$ nazywany jest **podprzestrzenią liniową** przestrzeni X, jeżeli spełnia aksjomaty przestrzeni liniowej z działaniem grupowym i mnożeniem przez skalar obciętymi do X_0.

Rozmaitością liniową (**hiperpłaszczyzną**) w X jest każdy podzbiór o postaci:

$$\{a \in X \ : \ a = \{a_0\} + X_0\}$$

gdzie $a_0 \in X$, zaś $X_0 \subset X$ jest podprzestrzenią liniową w X.

• Przekształcenie liniowe

$A \ : \ X \supset D(A) \to Y$

• Liniowa niezależność. Baza

Niech $\{a_i \in \mathbb{R}^m\}_{i=1}^n$ będzie zbiorem wektorów. Wektor $a \in \mathbb{R}^m$, dla którego zachodzi

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, \ldots, n\}$$

jest **kombinacją liniową** wektorów $\{a_i \in \mathbb{R}^m\}_{i=1}^n$.

Niech $P \subset \mathbb{R}^m$ będzie podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Zbiorowi temu przyporządkowujemy następujący podzbiór $\operatorname{span} P \subset \mathbb{R}^m$

$$\operatorname{span} P = \left\{ a \in \mathbb{R}^m \ : \ a = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i, \qquad \begin{array}{c} k \in \mathbb{N}, \\ \alpha_i \in \mathbb{R}, \\ a_i \in P, \\ i \in \{1, \ldots, k\} \end{array} \right\}$$

nazywany **powłoką liniową** zbioru P.

Powłoka $\operatorname{span} P$ jest najmniejszą (ze względu na inkluzję) podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^m$ zawierającą zbiór P.

Niech P_1 i P_2 będą podzbiorami przestrzeni $\mathbb{R}^m$.

Zbiory te są **wzajemnie liniowo niezależne**, gdy

$$P_1 \neq \{0_m\}, \quad P_2 \neq \{0_m\}$$

oraz

$$\operatorname{span} P_1 \cap \operatorname{span} P_2 = \{0_m\}.$$

Wektory $\{a_i \in \mathbb{R}^m\}_{i=1}^n$ są **liniowo niezależne**, jeżeli

$$\left(\sum_{j=i}^{n} \alpha_i a_i = 0_m, \quad \alpha_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, \dots, n\} \right)$$
$$\Downarrow$$
$$(\alpha_i = 0,\ i \in \{1, \dots, n\})\ .$$

Niech $\{S_i \subset \mathbb{R}^m\}_{i=1}^k$ będzie rodziną podprzestrzeni liniowych przestrzeni $\mathbb{R}^m$.

Sumą tych podprzestrzeni jest zbiór

$$S_1 + \dots + S_k = \sum_{i=1}^{k} S_i =$$

$$\left\{ s \in \mathbb{R}^m \ :\ s = \sum_{i=1}^{k} a_i,\ a_i \in S_i,\ i \in \{1, \dots, k\} \right\}$$

Zaś ich **przekrojem** – zbiór

$$S_1 \cap \cdots \cap S_k =$$

$$\bigcap_{i=1}^{k} S_i = \{ s \in \mathbb{R}^m \; : \; s \in S_i, \; i \in \{1, \ldots, k\} \} \, .$$

Ponieważ $0_m \in S_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, zatem przekrój dowolnych podprzestrzeni liniowych przestrzeni $\mathbb{R}^m$ jest niepusty.

Suma oraz przekrój podprzestrzeni $\{S_i \subset \mathbb{R}^m\}_{i=1}^k$ są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathbb{R}^m$.

Podprzestrzeń $S \subset \mathbb{R}^m$ jest **sumą prostą** podprzestrzeni $\{S_i \subset \mathbb{R}^m\}_{i=1}^k$, co zapisuje się jako

$$S = S_1 \oplus \cdots \oplus S_i = \bigoplus_{i=1}^{k} S_i$$

jeżeli $\forall s \in S$ posiada jednoznaczną reprezentację

$$s = \sum_{i=1}^{k} a_i, \quad a_i \in S_i, \; i \in \{1, \ldots, k\} \, .$$

Zbiór wektorów $\{a_i \subset \mathbb{R}^m\}_{i=1}^k$ nazywa się **bazą** podprzestrzeni $S \subset \mathbb{R}^m$, jeżeli

- $a_i \in S$, $i \in \{1, \ldots, k\}$,
- a_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, są liniowo niezależne,
- $S = \operatorname{span}\{a_i\}_{i=1}^k$.

Wszystkie bazy podprzestrzeni $S \subset \mathbb{R}^m$ mają taką samą liczbę elementów – określaną jako **wymiar** tej podprzestrzeni ($\dim S$).

Niech $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^m$ oznaczają podprzestrzenie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Wymiar sumy $S_1 + S_2$ tych podprzestrzeni określony jest wzorem

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)\,.$$

W przypadku sumy prostej $S_1 \oplus S_2$ otrzymuje się

$$\dim(S_1 \oplus S_2) = \dim S_1 + \dim S_2\,.$$

• Macierz przekształcenia liniowego

Macierz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ traktować można jako macierz pewnego przekształcenia liniowego

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax.$$

Zbiór wszystkich takich macierzy jest bowiem izomorficzny ze zbiorem $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ wszystkich przekształceń liniowych przestrzeni $\mathbb{R}^n$ w przestrzeń $\mathbb{R}^m$.

Wektor $y = Ax \in \mathbb{R}^m$ jest **obrazem** wektora $x \in \mathbb{R}^n$, zaś dla danego wektora $y \in \mathbb{R}^m$ każdy wektor $x \in \mathbb{R}^n$, dla którego zachodzi $y = Ax$ jest **przeciwobrazem** wektora y.

Zauważmy, że gdy $y \notin A(\mathbb{R}^n)$ taki przeciwobraz jest zbiorem pustym.

Dla $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wyróżnia się dwie podprzestrzenie tego przekształcenia, często określane także jako podprzestrzenie związane z macierzą $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

($\star$) Zbiór $\operatorname{Im} A \subset \mathbb{R}^m$ zdefiniowany jako

$$\operatorname{Im} A = \{y \in \mathbb{R}^m \ : \ \exists x \in \mathbb{R}^n \ \vdash \ y = Ax\}$$

nazywany jest **obrazem** (**przestrzenią wartości**, **przestrzenią zasięgową**) przekształcenia A (macierzy A).

($\star$) Zbiór $\operatorname{Ker} A \subset \mathbb{R}^n$, określany jako **przestrzeń zerowa** (**jądro**) odwzorowania A (macierzy A), zdefiniowany jest następująco

$$\operatorname{Ker} A = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = 0_m\} \ .$$

Dla macierzy $A = \left[\begin{array}{ccc} a_1 & \cdots & a_n \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $a_i \in \mathbb{R}^m$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, obraz $\operatorname{Im} A$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^m$ rozpietą na kolumnach tej macierzy:

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{span} \{a_i\}_{i=1}^n .$$

O $\operatorname{Im} A$ mówi się jako o **kolumnowej podprzestrzeni** danej macierzy A.

Przestrzeń zerowa $\operatorname{Ker} A$ macierzy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Rząd przekształcenia liniowego

$$A \ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

czyli **rząd macierzy** A zdefiniowany jest jako

$$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} A \,.$$

Ponieważ zachodzi $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$, zatem:

- rząd macierzy A jest równy maksymalnej liczbie liniowo niezależnych kolumn oraz maksymalnej liczbie liniowo niezależnych wierszy tej macierzy,
- $\operatorname{rank} A \le \min\{m, n\}$.

Dla dowolnego przekształcenia liniowego $A \ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$) zachodzi:

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A &= \dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{rank} A \\ &= \dim \mathbb{R}^n \\ &= n \,. \end{aligned}$$

Wynika stąd, iż dla macierzy kwadratowej $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ poniższe warunki są równoważne:

- macierz A jest nieosobliwa,
- $\operatorname{Ker} A = \{0_n\}$,
- macierz A ma pełny rząd $(\operatorname{rank} A = n)$.

Dla dowolnych $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ oraz $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ zachodzi

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} AB &= \operatorname{rank} B - \dim \operatorname{Im} B \cap \operatorname{Ker} A \\ &= \operatorname{rank} A - \dim \operatorname{Im} A^T \cap \operatorname{Ker} B^T . \end{aligned}$$

Podprzestrzeń liniowa $S \subset \mathbb{R}^n$ jest podprzestrzenią **niezmienniczą** (**inwariantną**) przekształcenia $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, gdy

$$\forall a \in S \quad Aa \in S.$$

Oznacza to, że obraz podprzestrzeni S względem przekształcenia A zawiera się w S

$$AS \subset S.$$

Podprzestrzeń taką określa się także jako A-inwariantną.

- **Ortogonalność** • **Rzuty**

• Zagadnienie własne

Zagadnienie własne, związane z macierzą $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (liniowym operatorem)

$$A \;:\; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad (\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$$

polega na wyznaczeniu zbioru **wektorów własnych** $\{x_i \in \mathbb{R}^n\}_{i=1}^n$, czyli zbioru kierunków A-niezmienniczych oraz zbioru **wartości własnych** (**widma**) $\{\lambda_i \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})\}_{i=1}^n$, dla których zachodzi

$$Ax_i = \lambda_i x_i, \quad x_i \neq 0_n,\ i \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Aby jednorodne liniowe równanie

$$(A - \lambda_i I_n)x_i = 0_n$$

posiadało niezerowe rozwiązanie

$$x_i \in \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_n), \quad x_i \neq 0_n$$

musi obowiązywać nierówność

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_n) > 0, \quad i \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Wynika stąd, że wartości własne $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ wyznaczymy, rozważając warunek

$$\operatorname{rank}(A - \lambda_i I_n) < n, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Wartości własne macierzy A muszą przeto spełniać następujące algebraiczne równanie stopnia n

$$\det(A - \lambda_i I_n) = 0, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Twierdzenie **Cayley'a-Hamiltona** głosi, że każda macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spełnia swoje **równanie charakterystyczne**:

$$\varphi_A(A) = 0_{n\times n}$$

gdzie $\varphi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ jest **wielomianem charakterystycznym** tej macierzy.

- **Norma**

Niech X oznacza przestrzeń liniową nad ciałem K. Funkcję

$$\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$$

nazywamy **normą**, jeżeli:

$$\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X,$$
$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in K,$$
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X,$$
$$\|x\| = 0 \iff x = 0_X \; .$$

Gdy $X = \mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$, wtedy dla $x = [\, x_i \;\cdots\; x_n \,]^T$ mamy:

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \\ \|x\|_\infty &= \max_i |x_i| \, . \end{aligned}$$

Dla $X = \mathbb{R}^{m\times n}$ lub $\mathbb{C}^{m\times n}$ przy $A = [a_{ij}]_{m,n}$ mamy:

$$\begin{aligned}
\|A\|_1 &= \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \\
\|A\|_\infty &= \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \\
\|A\|_F &= \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \\
\|A\|_s &= \bar{\sigma}(A) = \max_{1\le i\le \min\{m,n\}} \sigma_i(A)\,.
\end{aligned}$$

Norma $\|\ \cdot\ \|_F$ to norma **Frobeniusa** (macierzowa norma **euklidesowa**, norma **Schura**), zaś $\|\ \cdot\ \|_s$ jest macierzową normą **spektralną**.

Niech $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ($\mathbb{C}^{m\times n}$). Rozważając wektorowe normy w przestrzeniach $\mathbb{R}^m$ ($\mathbb{C}^m$) oraz $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), zdefiniować można odpowiednie **indukowane** macierzowe normy (normy operatora $A\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$))

$$\|A\|_{ind} = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\,.$$

Kładąc wektorowe normy euklidesowe, mamy

$$\|\ \cdot\ \|_{ind} \equiv \|\ \cdot\ \|_2 = \|\ \cdot\ \|_s.$$