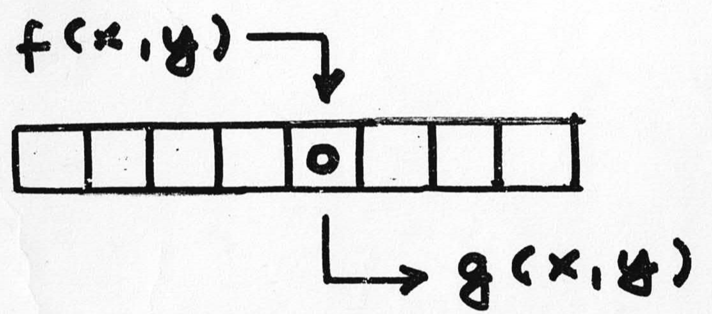
Jednopunktowe metody przetwarzania obrazu

point operations

$$g(x,y) = h[f(x,y)]$$

Szybka metoda liczenia wykorzystuje technikę tabelaryzacji: wartości argumentu f stanowią adres elementu tablicy (rejestru) zawierającego odpowiednią wartość g

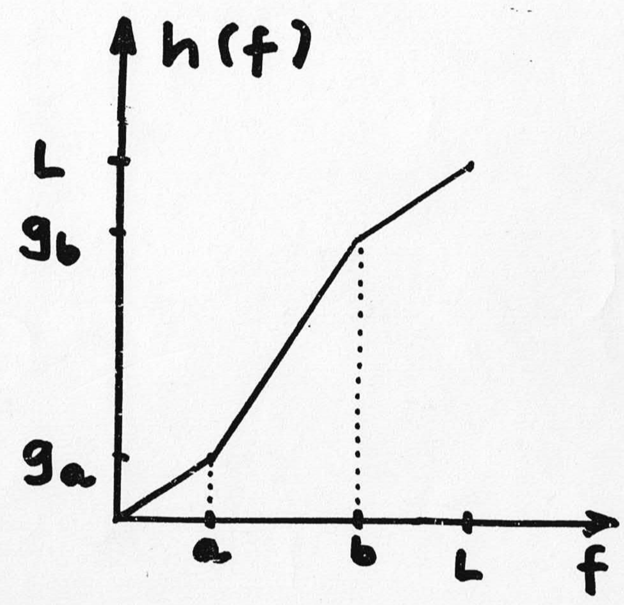


LUT - look-up-table

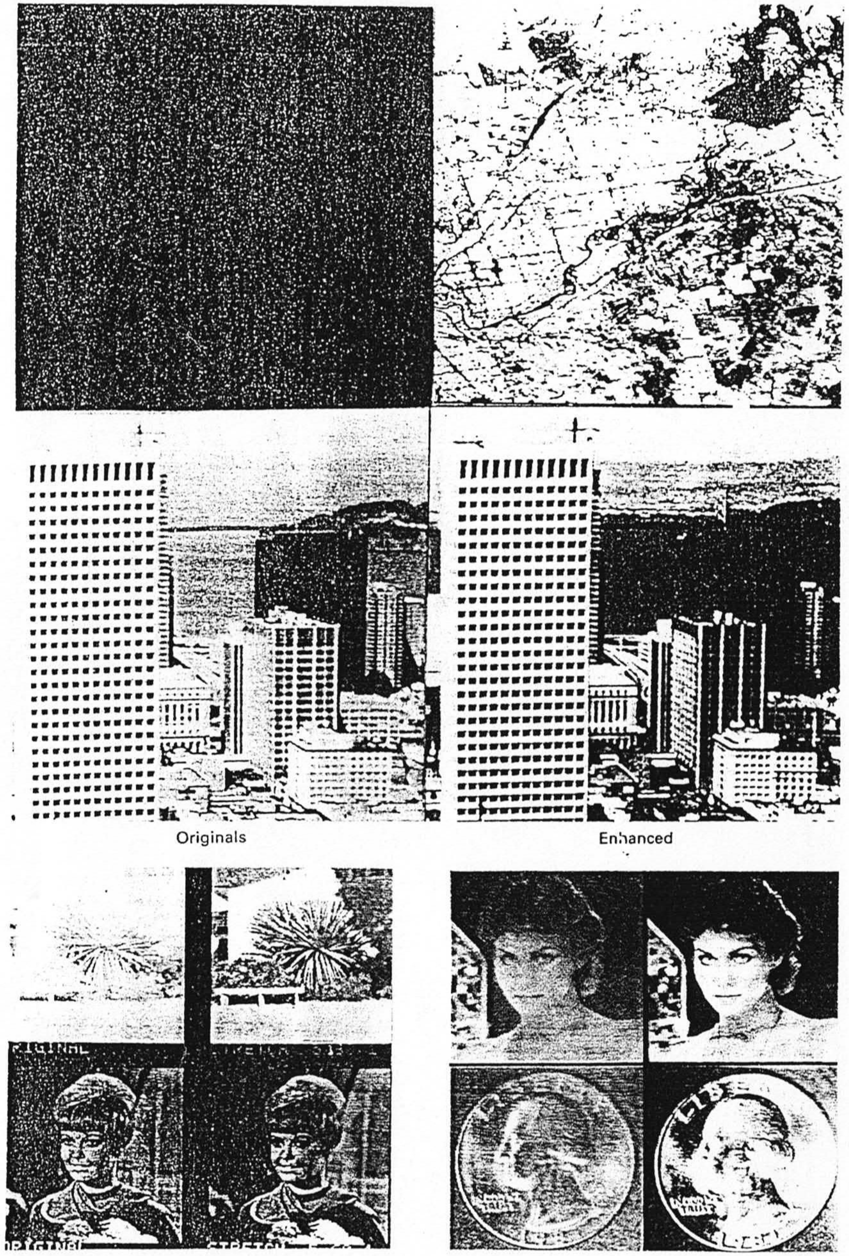
Zmiana kontrastu

contrast stretching

$$h(f) = \begin{cases} \alpha f & 0 \leq f < a \\ \beta(f-a) + g_a & a \leq f < b \\ \gamma(f-b) + g_b & b \leq f < L \end{cases}$$



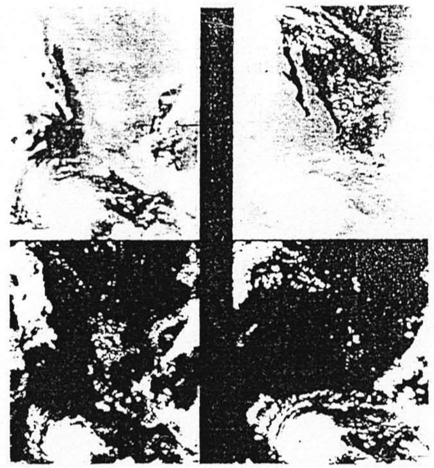
Parametry a i b wyznacza się badając histogram obrazu



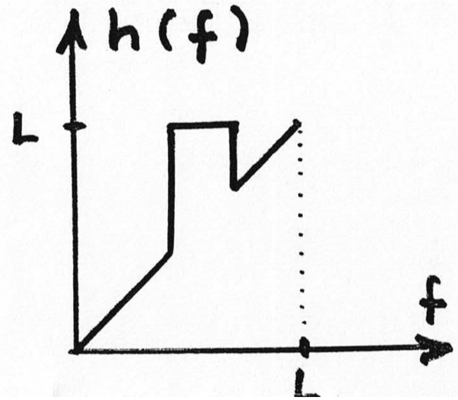
Wyniki otrzymywane na drodze zmiany kontrastu

Selektywne wzmocnienie

intensity level slicing

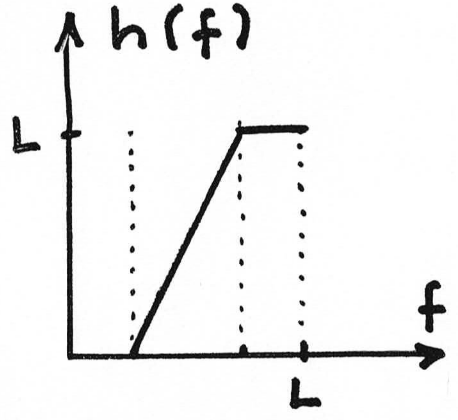


$$h(f) = \begin{cases} L & \text{gdy } f \in [a,b] \\ f & \text{gdy } f \notin [a,b] \end{cases}$$



Obcinanie

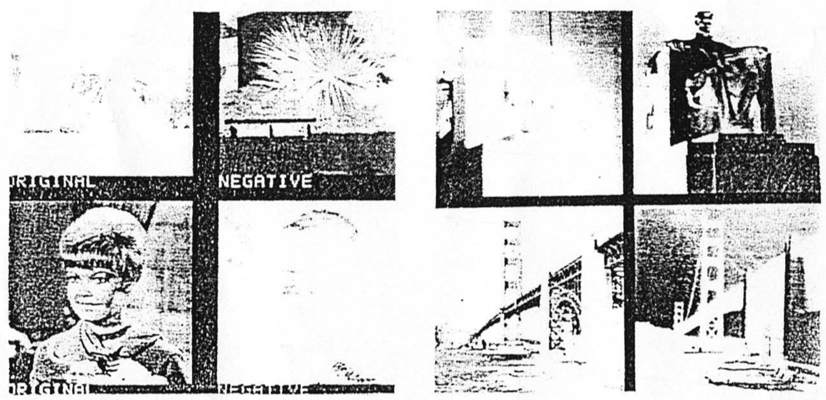
clipping



Tworzenie negatywu

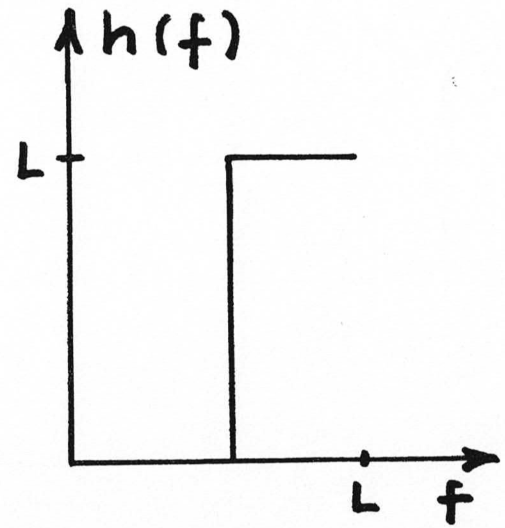
digital negative

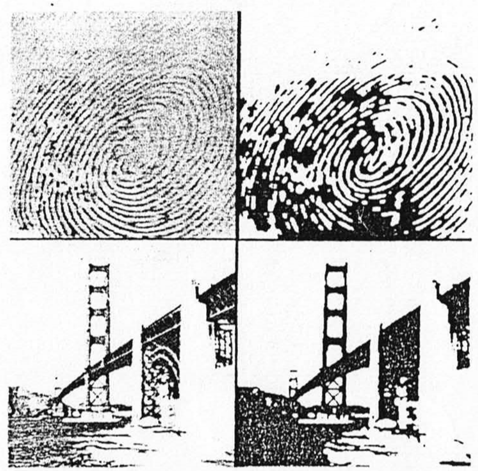
$$h(f) = L - f$$



Binaryzacja (progowanie)

thresholding

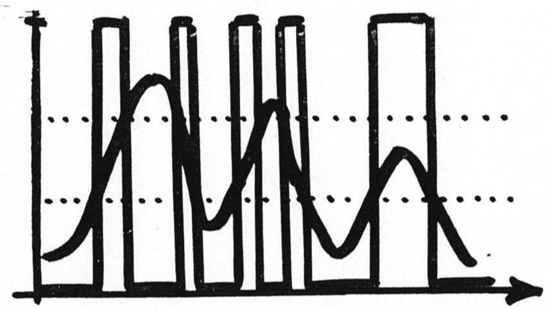




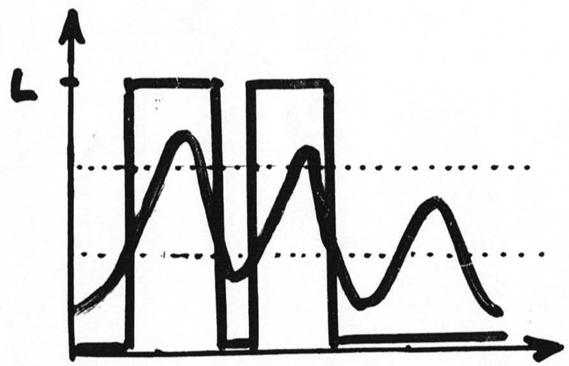
Zastosowanie binaryzacji

Stosowane warianty binaryzacji

- binaryzacja z podwójnym ograniczeniem



- binaryzacja warunkowa (z histerezą)



Analiza bitowa

bit extraction

Ile jest znaczących bitów w cyfrowej reprezentacji obrazu?

$$f = k_1 2^{B-1} + k_2 2^{B-2} + \dots + k_B$$

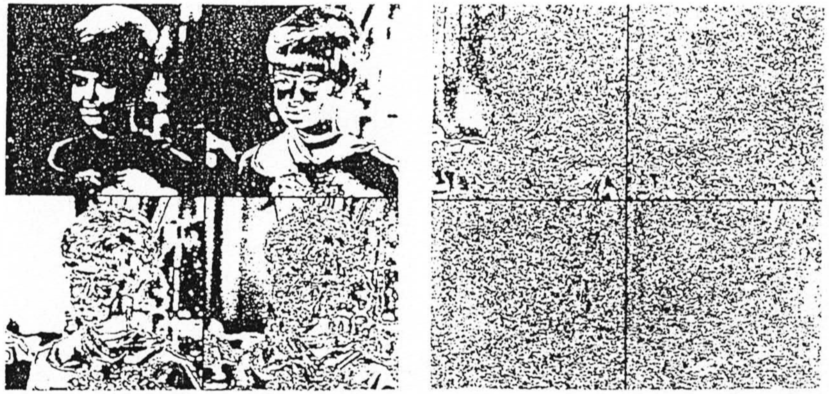
$$h(f) = \begin{cases} L & \text{gdy } k_n = 1 \\ 0 & \text{gdy } k_n = 0 \end{cases}$$

$$k_n = i_n - 2i_{n-1}$$

gdzie

$$i_n = \left[\frac{f}{2^{B-n}} \right]$$

a $[\cdot]$ jest symbolem funkcji entier



1	2
3	4

5	6
7	8

Zastosowanie analizy bitowej

Odejmowanie obrazów

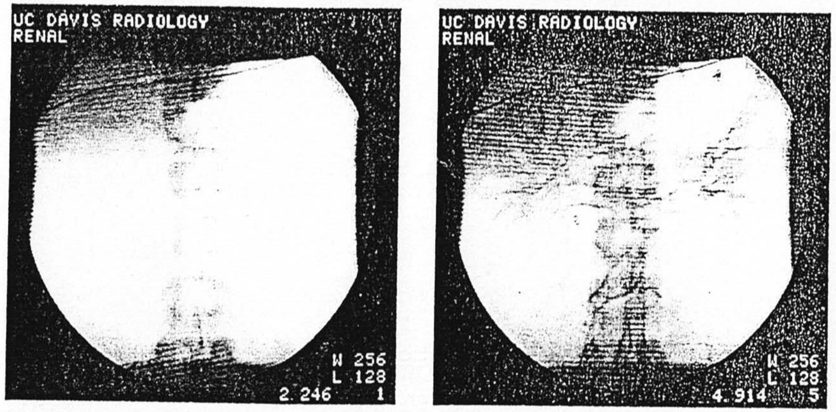
image subtraction

$$g(x,y) = h\left[f_1(x,y) - f_2(x,y)\right]$$

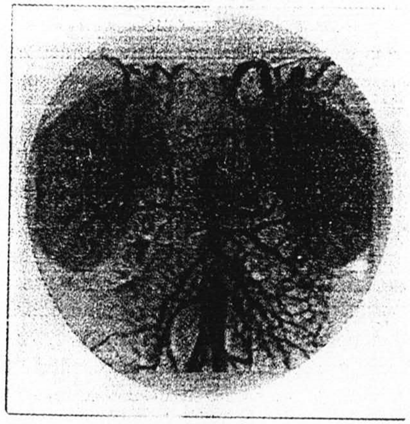
gdzie

$$h(f) = \begin{cases} L & \text{gdy } f > L \\ f & \text{gdy } 0 \leq f \leq L \\ 0 & \text{gdy } f < 0 \end{cases}$$

Zastosowanie metody odejmowania obrazów



a) Precontrast b) Postcontrast



- obróbka zdjęć rentgenowskich
- wykrywanie błędów montażu powierzchniowego układów elektronicznych
- wykrywanie ruchu

Podstawowe pojęcia teorii liniowych układów dwuwymiarowych

$$f(m,n) = f_q(m\Delta x, n\Delta y)$$

$$f(m,n) \longrightarrow \boxed{L[\cdot]} \xrightarrow{g(m,n)}$$

$$g(m,n) = L\left[f(m,n)\right]$$

Układ dwuwymiarowy nazywamy liniowym jeżeli spełnia warunek

$$L\left[a_1 f_1(m,n) + a_2 f_2(m,n)\right] = a_1 L\left[f_1(m,n)\right] + a_2 L\left[f_2(m,n)\right]$$

dla dowolnych wartości a_1, a_2, m i n.

Odpowiedzią impulsową układu dwuwymiarowego nazywamy funkcję

$$h(m,n;m',n') \triangleq L\left[\delta(m-m', n-n')\right]$$

gdzie $\delta(m-m', n-n')$ oznacza funkcję delta Kroneckera umiejscowioną w punkcie (m', n')

Zauważmy, że

$$g(m,n) = L\left[f(m,n)\right] = L\left[\sum_{m'}\sum_{n'} f(m',n') \cdot \delta(m-m', n-n')\right]$$

$$= \sum_{m'} \sum_{n'} f(m',n') \cdot$$

$$\cdot L[\delta(m-m', n-n')] =$$

$$= \sum_{m'} \sum_{n'} f(m',n') h(m,n;m',n')$$

Układ niezmienniczy względem przesunięć

shift invariant
spatially invariant

$$h(m,n;m',n') =$$

$$= h(m-m', n-n')$$

$$g(m,n) = f(m,n) ** h(m,n)$$

$$= \sum_{m',n'=-\infty}^{\infty} \sum f(m',n') \cdot$$

$$\cdot h(m-m', n-n') =$$

$$= \sum_{m',n'=-\infty}^{\infty} \sum h(m',n') \cdot$$

$$\cdot f(m-m', n-n')$$

Dwuwymiarowa transformata $\mathcal{Z}$

$$F(z_1, z_2) =$$

$$= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \sum f(m,n) z_1^{-m} z_2^{-n}$$

$$f(m,n) = \frac{1}{(2\pi j)^2} \oint \oint$$

$$F(z_1,z_2) z_1^{m-1} z_2^{n-1} dz_1 dz_2$$

$$G(z_1,z_2) = H(z_1,z_2) F(z_1,z_2)$$

Układy separowalne

Układ nazywamy separowalnym jeżeli spełnia warunek

$$h(m,n) = h_1(m)h_2(n)$$

lub równoważnie

$$H(z_1,z_2) = H_1(z_1)H_2(z_2)$$

separability condition

Jeśli spełniony jest warunek separowalności

$$g(m,n) = h(m,n) ** f(m,n)$$

$$= h_1(m) * [h_2(n) * f(m,n)]$$

tj. splot dwuwymiarowy można liczyć jako złożenie dwóch splotów jednowymiarowych

Stabilność układów dwuwymiarowych

Warunek stabilności układu niezmienniczego względem przesunięć ma postać

$$\sum_m \sum_n |h(m,n)| < \infty$$

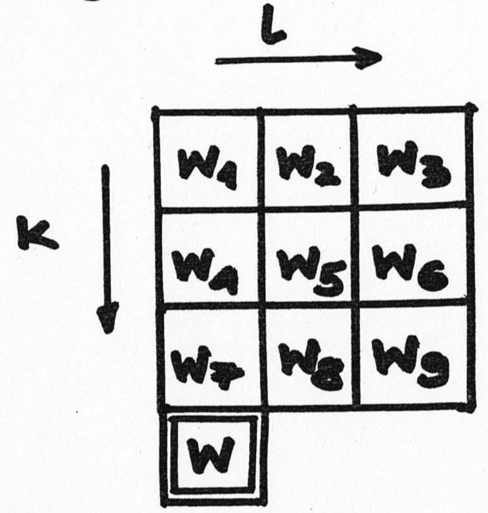
Dla układów wymiernych i separowalnych oznacza to, że bieguny transmitancji $H_1(z_1)$ i $H_2(z_2)$ muszą być położone wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej

Układy o skończonej odpowiedzi impulsowej

FIR – finite impulse response

$$g(m,n) = \sum_{(k,l)\in W}\sum h(k,l)\,f(m-k,n-l)$$

gdzie W oznacza dwuwymiarowe okno („maskę") filtracji



$$g(m,n) =$$

$$= \frac{1}{W}\Big[w_1 f(m-1,n-1) + w_2 f(m-1,n) + w_3 f(m-1,n+1) + w_4 f(m,n-1) + w_5 f(m,n) + w_6 f(m,n+1) + w_7 f(m+1,n-1) + w_8 f(m+1,n) + w_9 f(m+1,n+1)\Big]$$

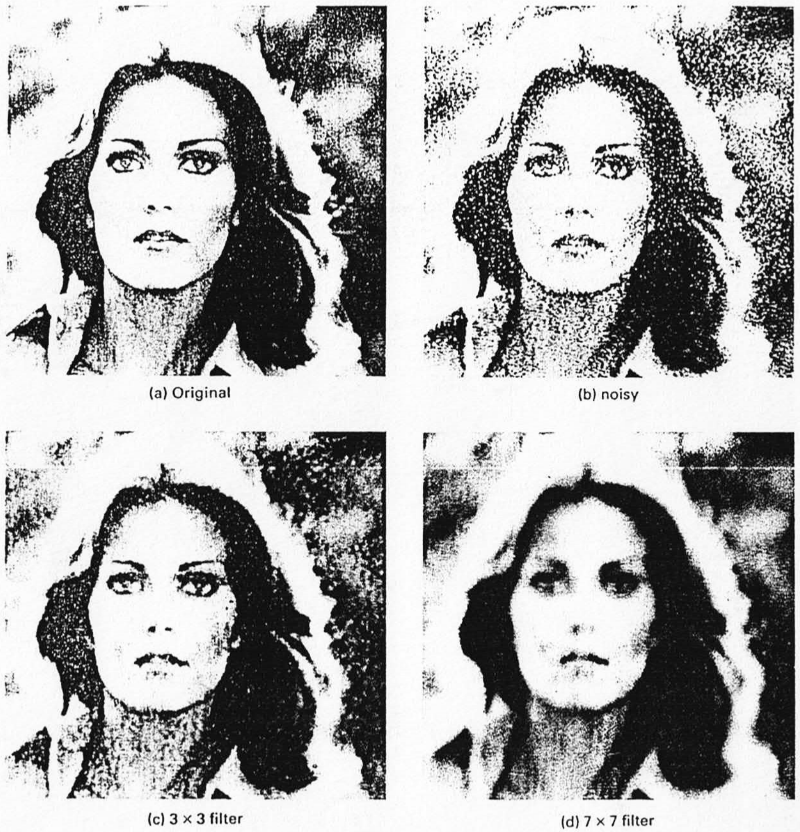
Filtry dolnopasmowe

filtr uśredniający

$$g(m,n) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{(k,l)\in W}\sum f(m-k,n-l)$$

gdzie N oznacza liczbę pikseli tworzących okno W



(a) Original (b) noisy

(c) 3 × 3 filter (d) 7 × 7 filter

działanie filtru uśredniającego

Uśrednianie z oknem prostokątnym jest operacją separowalną tj. równoważną uśrednianiu po wierszach a następnie po kolumnach (lub odwrotnie)

$$\frac{1}{\boxed{9}}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} = \frac{1}{\boxed{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} * \frac{1}{\boxed{3}}\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}$$

Uśrednianie nierównomierne

$$\frac{1}{\boxed{16}}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{bmatrix} = \frac{1}{\boxed{}}\begin{bmatrix}\\\\\end{bmatrix} * \frac{1}{\boxed{}}\begin{bmatrix}&&\end{bmatrix}$$

separowalne

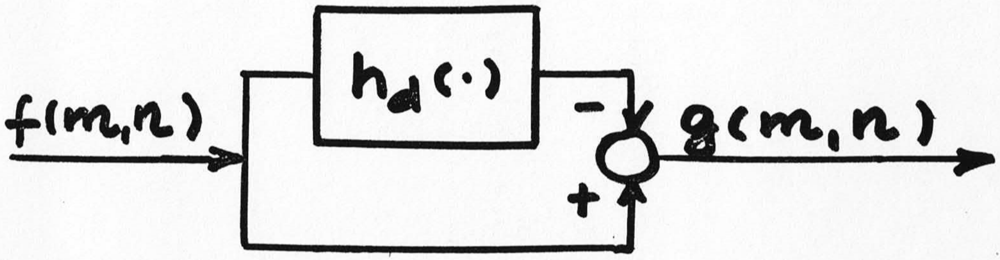
0	1	0
1	4	1
0	1	0

$\boxed{8}$

nieseparowalne

Filtracja górnopasmowa

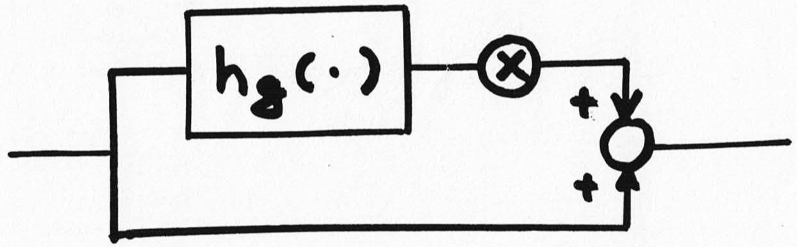
$$h_g(m,n) = \delta(m,n) + \\ - h_d(m,n)$$

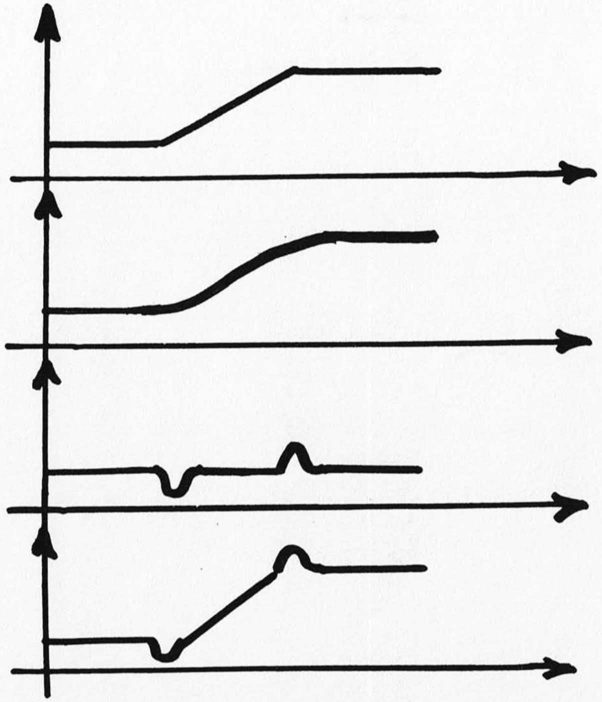


0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

$\boxed{4}$

Zastosowanie filtracji górnopasmowej do podkreślania krawędzi





unsharp masking
crispening

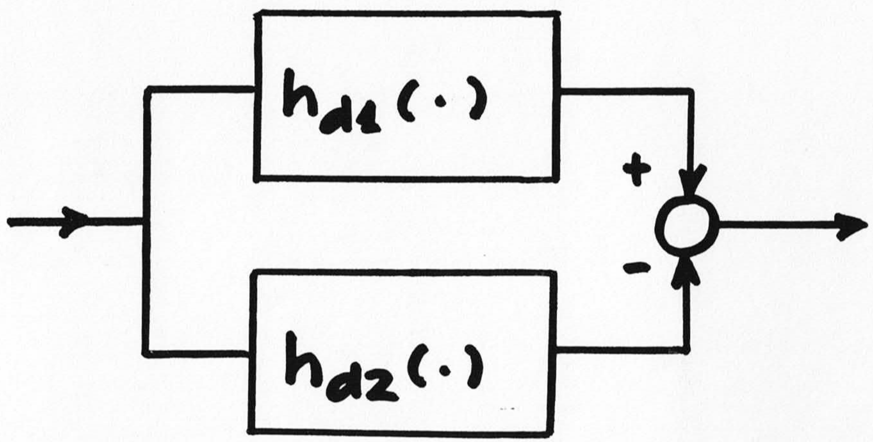
Maski często stosowanych filtrów górnoprzepustowych

1	-2	1
-2	5	-2
1	-2	1

-1	-1	-1
-1	9	-1
-1	-1	-1

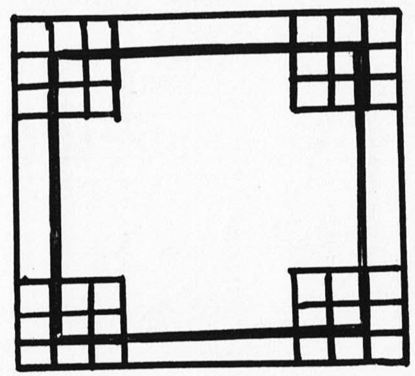
0	-1	0
-1	5	-1
0	-1	0

Filtracja środkowoprzepustowa

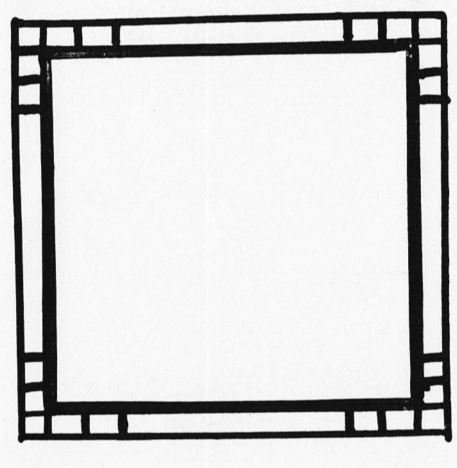


Rozwiązywanie problemów brzegowych

a) zmniejszenie rozmiaru obrazu wyjściowego



b) powiększenie obrazu wejściowego o dodatkowe piksele



Filtry o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (rekursywne)

IIR - infinite impulse response

$$g(m,n) = \sum_{(k,l)\in S_1}\sum a(k,l)\,g(m-k,n-l) + \sum_{(k,l)\in S_2}\sum b(k,l)\cdot f(m-k,n-l)$$

$$H(z_1,z_2) = \frac{B(z_1,z_2)}{A(z_1,z_2)}$$

gdzie

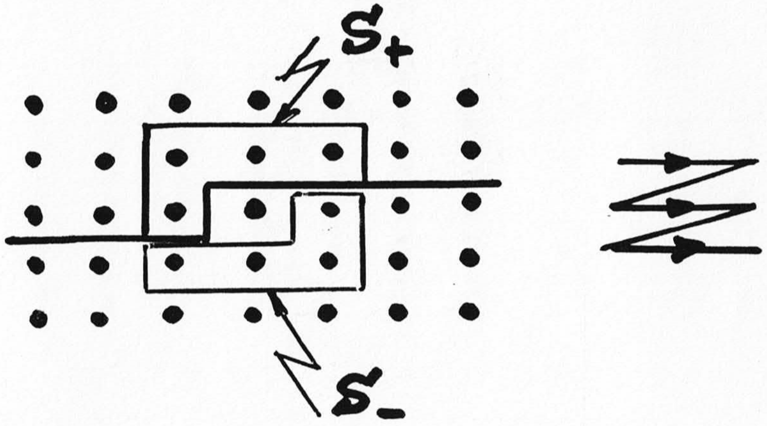
$$B(z_1,z_2) = \sum_{(k,l)\in S_2}\sum b(k,l)\,z_1^{-k} z_1^{-l}$$

$$A(z_1,z_2) = 1 + \sum_{(k,l)\in S_1}\sum a(k,l)\,z_1^{-k} z_2^{-l}$$

Pojęcie przyczynowości w teorii układów dwuwymiarowych

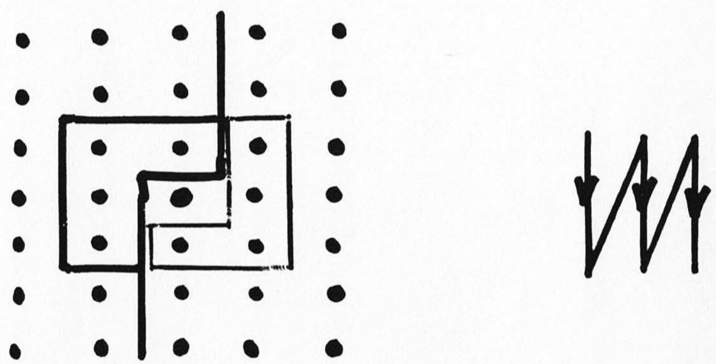
warunek przyczynowości układu jednowymiarowego

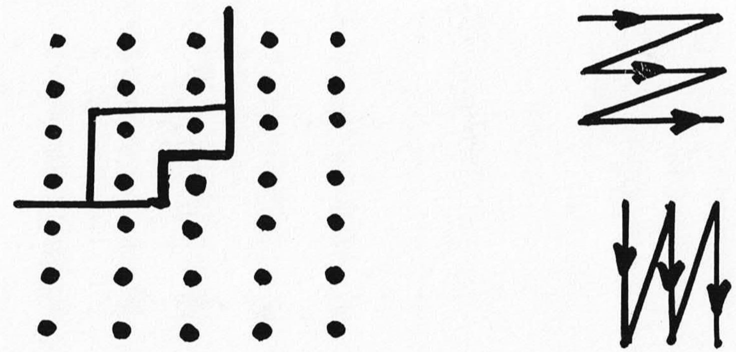
$$h(t) = 0 \quad \forall t < 0$$



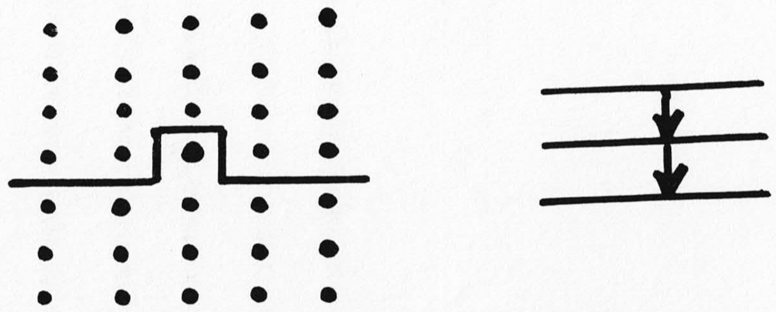
układy przyczynowe
(causal) i antyprzyczynowe
(anticausal)

NSHP - nonsymmetric
half-plane





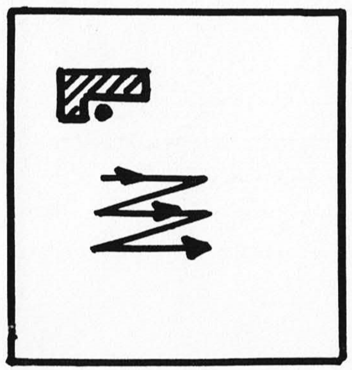
układy silnie przyczynowe
(strongly causal)



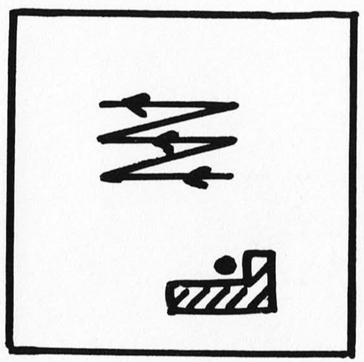
układy półprzyczynowe
(semi causal)

Filtracja dwukierunkowa

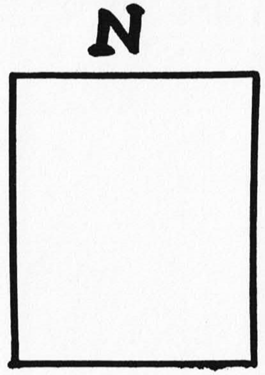
pierwsza faza:



druga faza:



Dwuwymiarowa transformata Fouriera



$$F(p,q) =$$

$$= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\, W_M^{mp} W_N^{nq}$$

$$f(m,n) = \frac{1}{MN} \cdot$$

$$\cdot \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} F(p,q)\, W_M^{-mp} W_N^{-nq}$$

gdzie

$$W_M = e^{-\frac{2\pi j}{M}} \qquad W_N = e^{-\frac{2\pi j}{N}}$$

Transformata Fouriera jest przekształceniem separowalnym

$$F'(m,q) = \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) W_N^{nq}$$

$$F(p,q) = \sum_{m=0}^{M-1} F'(m,q) W_M^{mp}$$

Gdy M i N są potęgami liczby 2 do obliczeń można użyć szybkiej transformaty Fouriera (FFT)

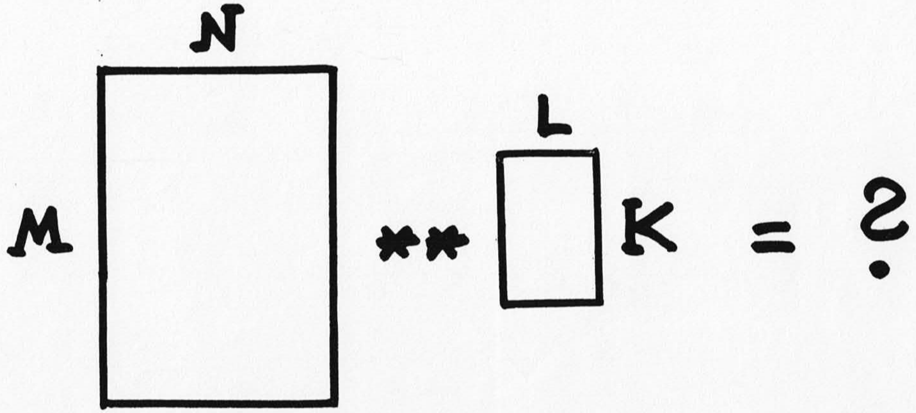
RCFFT - row-column fast Fourier transform

$$\frac{MN}{2} \log_2 (M \cdot N)$$

mnożeń zespolonych

<u>Zastosowanie transformaty Fouriera do liczenia dwuwymiarowego splotu</u>

$$g(m,n) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} h(k,l) \cdot$$
$$\cdot f(m-k, n-l)$$



$$g(m,n) \stackrel{?}{=}$$
$$= \mathrm{IDFT}\{\mathrm{DFT}[h(m,n)] \cdot$$
$$\cdot \mathrm{DFT}[f(m,n)]\}$$

1. Wybieramy wielkości P i Q spełniające warunki
$P \geqslant K + M - 1$
$Q \geqslant L + N - 1$

2. Uzupełniamy zerami ciągi $h(k,l)$ i $f(m,n)$
zero padding

$$h_z(k,l) = \begin{cases} h(k,l) & (k,l) \in \Omega_{KL} \\ 0 & (k,l) \in \Omega_{PQ} - \Omega_{KL} \end{cases}$$

$$f_z(m,n) = \begin{cases} f(m,n) & (m,n) \in \Omega_{MN} \\ 0 & (m,n) \in \Omega_{PQ} - \Omega_{MN} \end{cases}$$

3. Wyznaczamy transformaty Fouriera

$$H_z(p,q) = DFT[h_z(k,l)]$$

$$F_z(p,q) = DFT[f_z(m,n)]$$

4. Wyznaczamy transformatę Fouriera poszerzonego obrazu wyjściowego

$$G_z(p,q) = H_z(p,q)\,F_z(p,q)$$

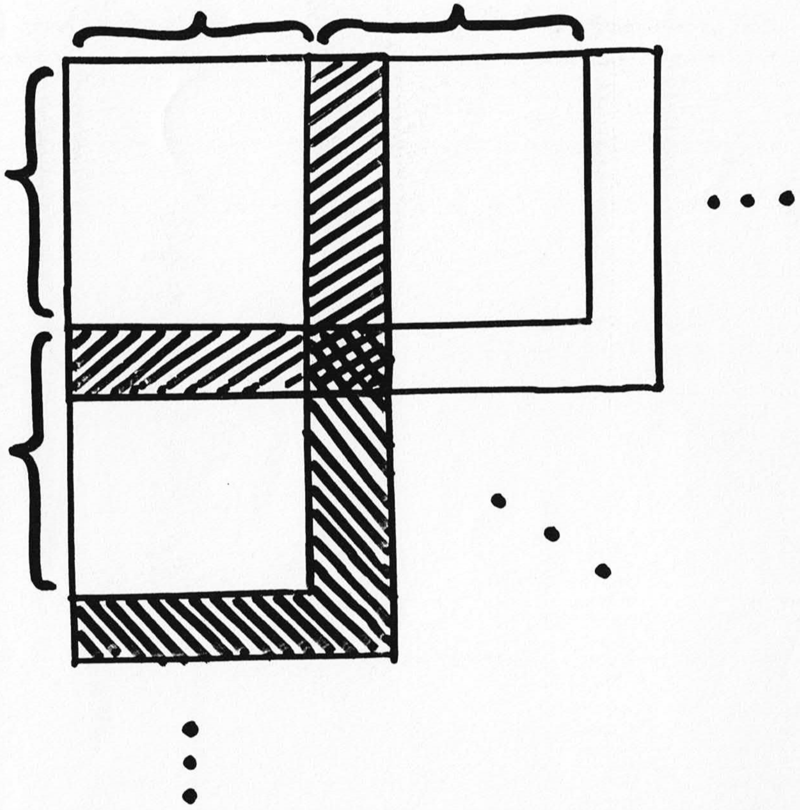
5. Wyznaczamy obraz wyjściowy

$$g_z(k,l) = IDFT[G_z(p,q)]$$

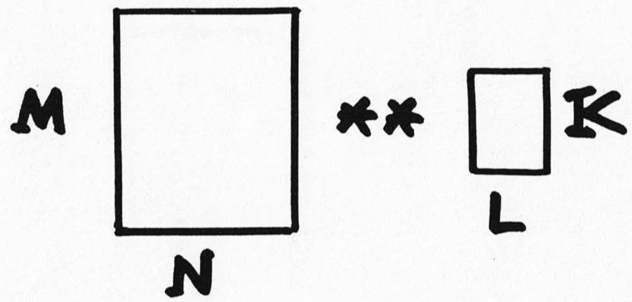
$$g(k,l) = g_z(k,l) \quad (k,l) \in \Omega_{MN}$$

Liczenie splotu metodą podziału na podobszary

overlap-add



Porównanie złożoności obliczeniowej różnych metod liczenia splotu



metoda bezpośrednia:

$\sim KL \cdot MN$

metoda „wiersze-kolumny" (dla filtrów separowalnych)

$\sim (K+L) \cdot MN$

metoda FFT:

$\sim 4(M+K)(N+L) \cdot \log_2[(M+K)(N+L)]$

Filtracja IIR w dziedzinie częstotliwości

$$G(p,q) = H(p,q)F(p,q)$$

gdzie

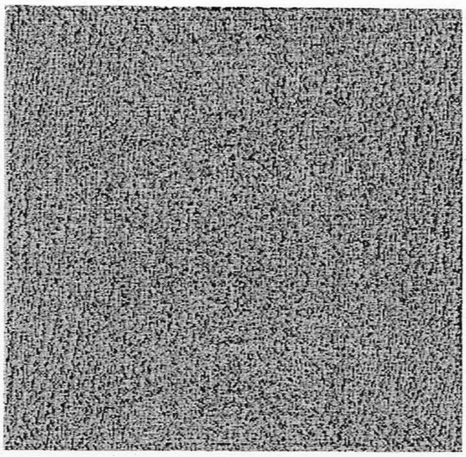
$$H(p,q) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(p,q)}{D(p_0,q_0)}\right]^{2n}}$$

w przypadku filtracji dolnopasmowej oraz

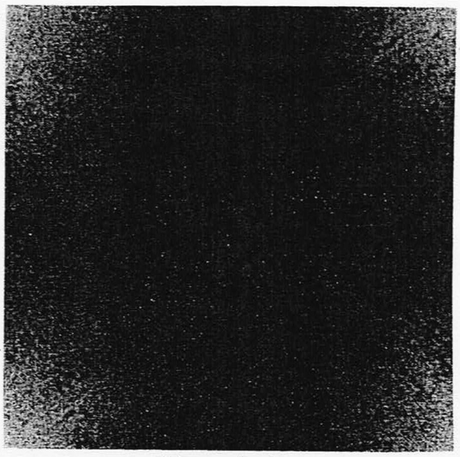
$$H(p,q) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(p_0,q_0)}{D(p,q)}\right]^{2n}}$$

$D(p,q)$ oznacza odległość w dziedzinie częstotliwości zaś p_0 i q_0 - częstotliwości odcięcia

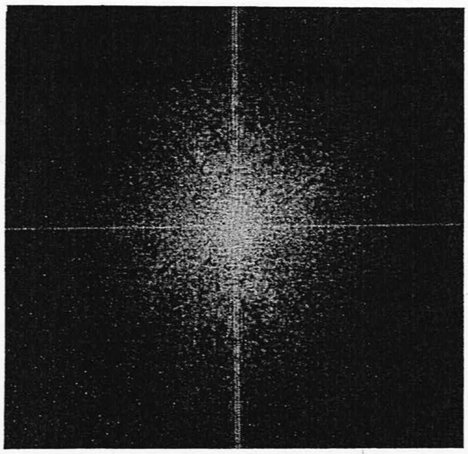
(a) Original image;



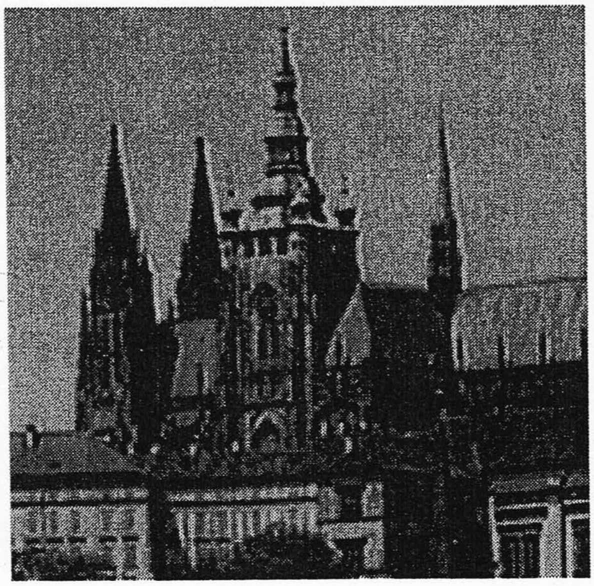
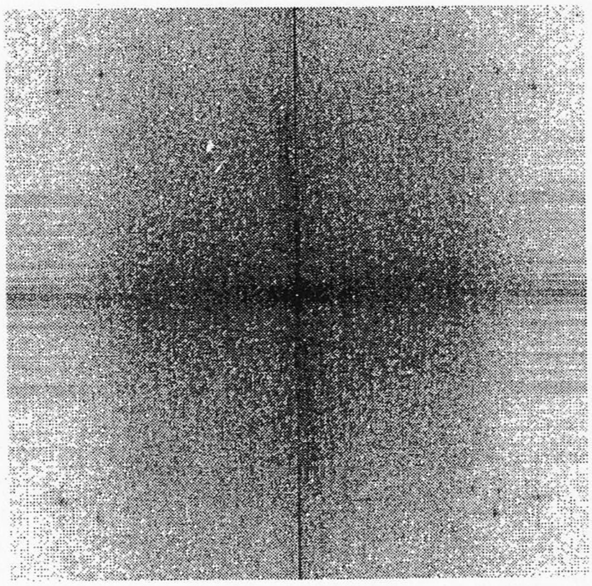
(b) phase;



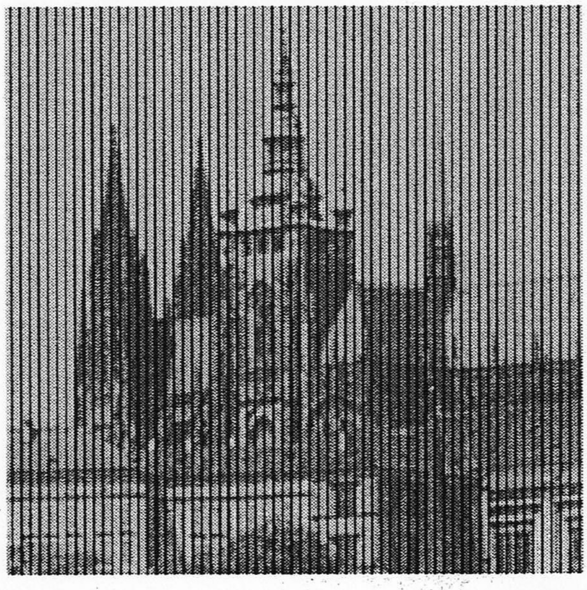
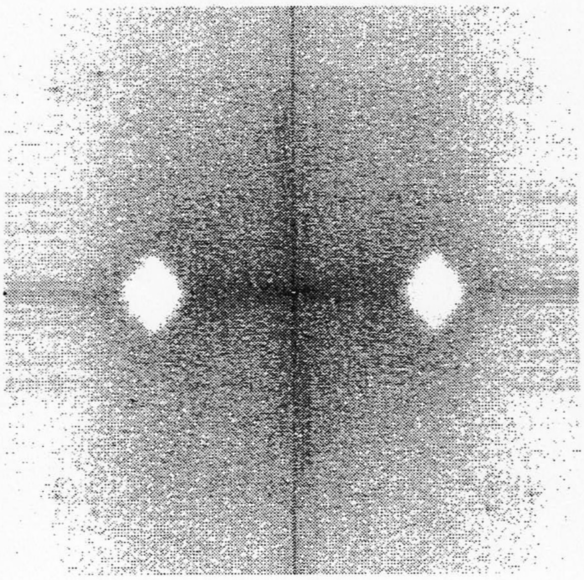
(c) magnitude;



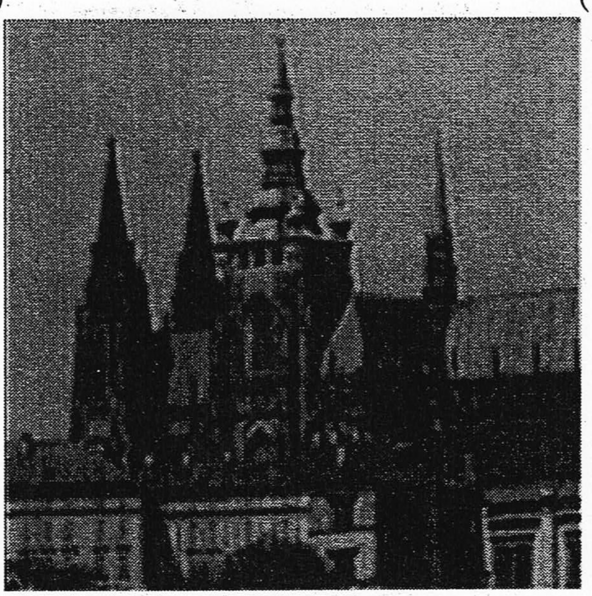
(d) magnitude centered.

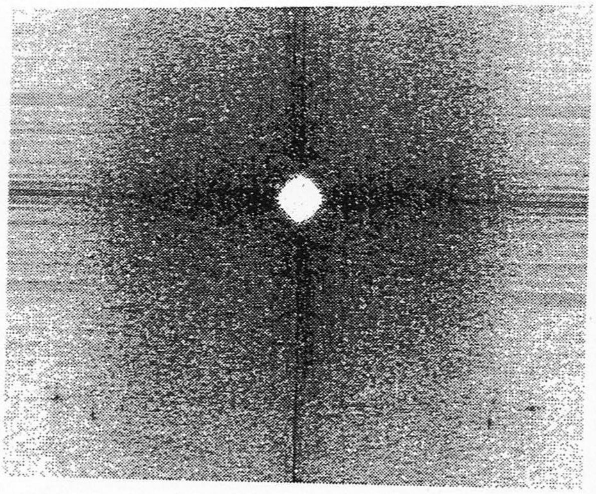
(a) (b)

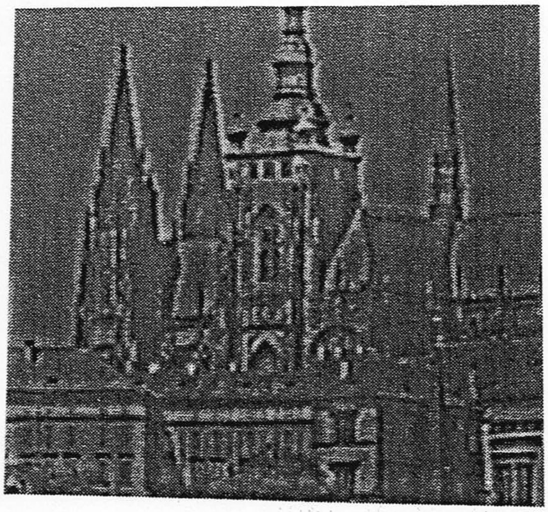
(a) (b)



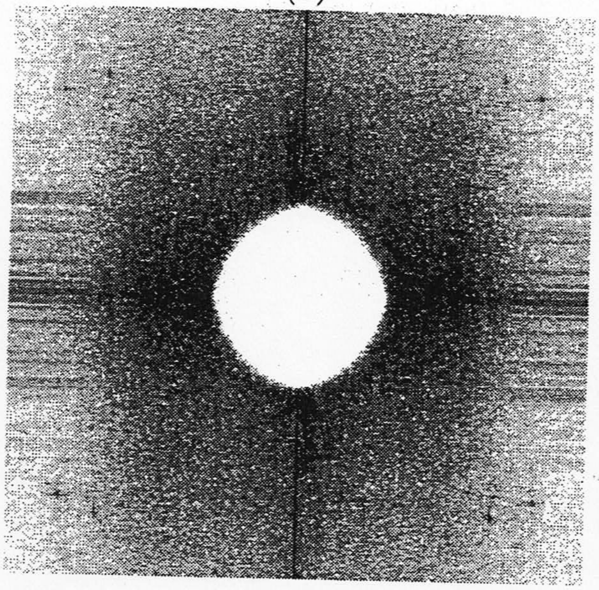
(c)



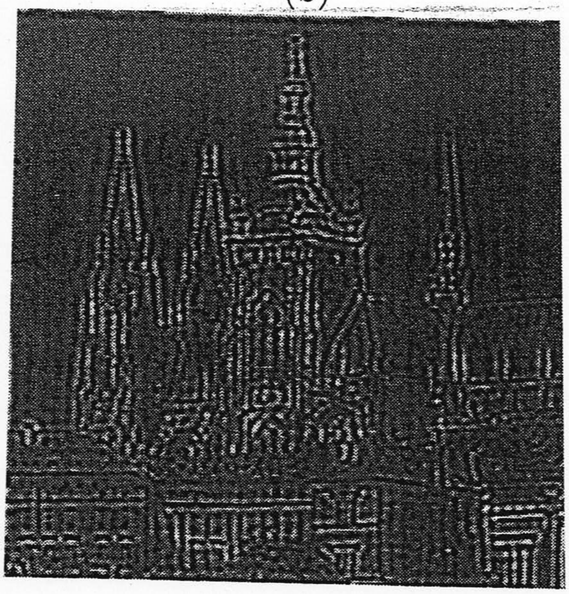
(a)



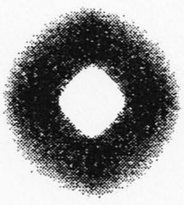
(b)



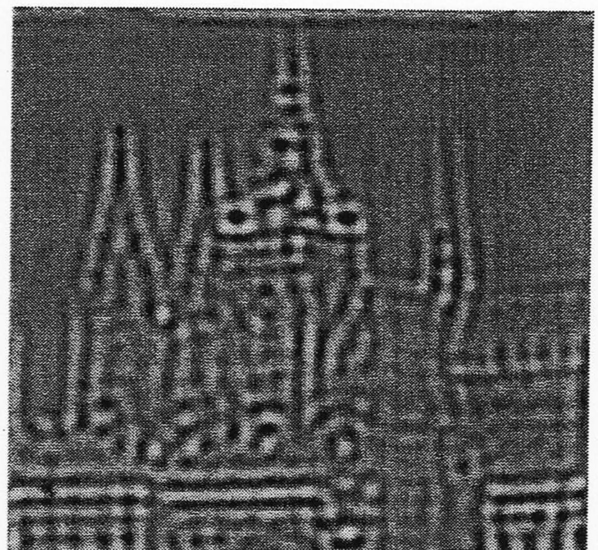
(c)



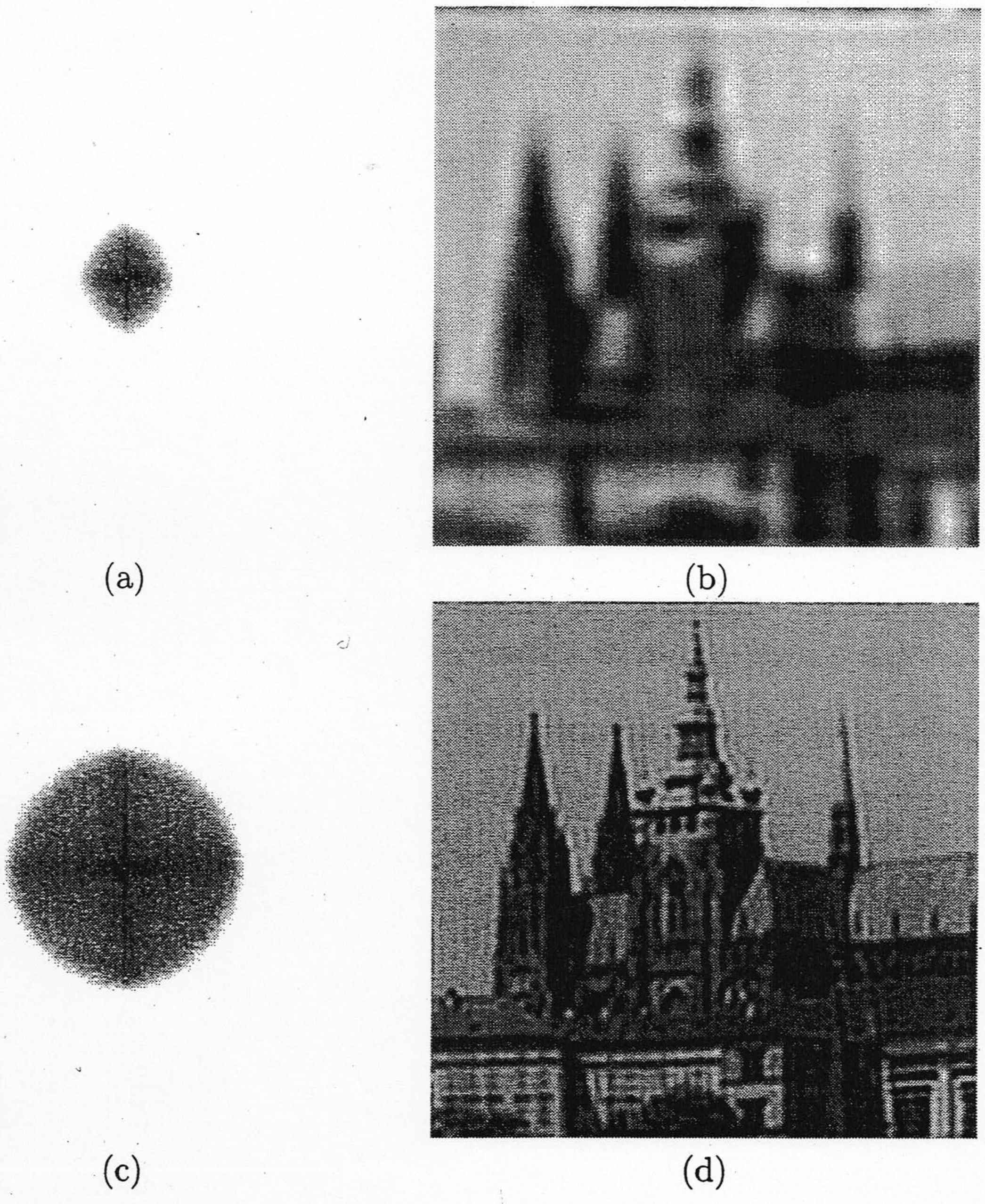
(d)



(a)



(b)



(a) (b)

(c) (d)

Filtracja nieliniowa

$$f(m,n) \longrightarrow \boxed{N[\cdot]} \xrightarrow{g(m,n)}$$

$$N[a_1 f_1(m,n) + a_2 f_2(m,n)]$$

$$\neq a_1 N[f_1(m,n)] +$$

$$+ a_2 N[f_2(m,n)]$$

Jednowymiarowy filtr medianowy i jego własności

Rozważmy ciąg $x_1, \dots, x_{2k+1}$. Niechaj $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{2k+1}$ oznacza ten sam ciąg uporządkowany rosnąco (lub malejąco)

$$\tilde{x}_1 = x_{i_1} \leq \tilde{x}_2 = x_{i_2} \leq \dots$$

$$\dots \leq \tilde{x}_{2k+1} = x_{i_{2k+1}}$$

Medianą ciągu $\{x_i\}$ nazywamy wielkość

$$\mathrm{med}\{x_1, \dots, x_{2k+1}\} =$$

$$= \tilde{x}_{k+1}$$

Uwaga 1

W przypadku, gdy liczba próbek jest parzysta korzysta się z zależności

$$\mathrm{med}\{x_1, \dots, x_{2k}\} =$$

$$= \frac{\tilde{x}_k + \tilde{x}_{k+1}}{2}$$

Uwaga 2

Przypuśćmy, że należy oszacować nieznaną wielkość x na podstawie pomiarów $x_1, \dots, x_n$, $n = 2k+1$ obarczonych błędami przypadkowymi (wzajemnie niezależnymi) o rozkładzie Laplace'a

$$x_i = x + n_i$$

$$p(n_i) = \frac{1}{2} e^{-|n_i|}$$

Funkcja wiarygodności Fishera przyjmuje wówczas postać

$$p(x; x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{2^n} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} |x_i - x|\right\}$$

a jej maksymalizacja sprowadza się do rozwiązania problemu

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x| \longmapsto \min$$

Wykazuje się, że poszukiwane rozwiązanie ma postać

$$\hat{x}_n = \operatorname{med}\{x_1, \dots, x_n\}$$

Ważona mediana

$$\sum_{i=1}^{n} w_i |x_i - x| \longmapsto \min$$

gdzie $w_i \in C_+$

$$\hat{x}_n = \operatorname{med}\{w_1 \square x_1, \dots, w_n x_n\}$$

gdzie $w_i \square x_i$ oznacza próbkę x_i powtórzoną w_i razy

Filtr medianowy

median filter

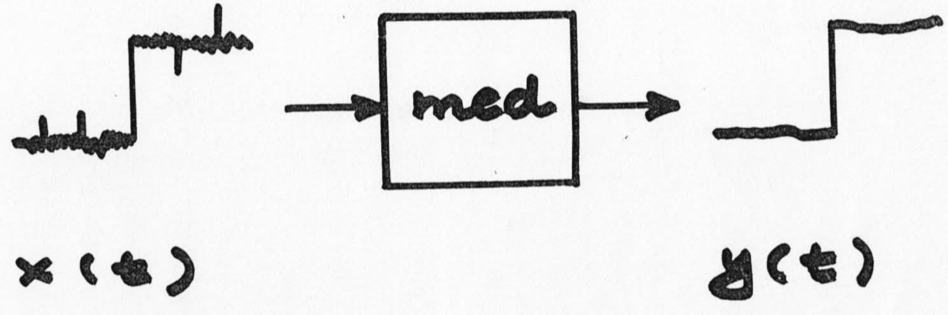
Tukey (1970)

$$y(t) = \mathrm{med}_K \{x(t)\}$$

$$= \mathrm{med}\{x(t-K), \dots, x(t-1), x(t), x(t+1), \dots, x(t+K)\}$$

własności:

- eliminuje szum impulsowy (przestaje być skuteczny dopiero w sytuacji, gdy liczba impulsów zakłócających przekracza 50% liczby wszystkich próbek); wielkość pojedynczych impulsów nie wpływa na sygnał wyjściowy
- tłumi addytywny szum pomiarowy (choć nieco gorzej niż filtr uśredniający)
- zachowuje kształt sygnału wejściowego w obszarze jego skokowych zmian



- posiada własność jednorodności tj.

$$\mathrm{med}_K\{a \cdot x(t)\} = a \cdot \mathrm{med}_K\{x(t)\}$$

dla dowolnego a

- posiada własność składania (stacking property)

Załóżmy, że $x(t)$ jest sygnałem skwantowanym przyjmującym M różnych wartości tj. $0 \leq x(t) < M$.

Niechaj $x^1(t), \ldots, x^{M-1}(t)$ oznaczają sygnały otrzymane w wyniku binaryzacji $x(t)$

$$x^m(t) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x(t) \geq m \\ 0 & \text{gdy } x(t) < m \end{cases}$$

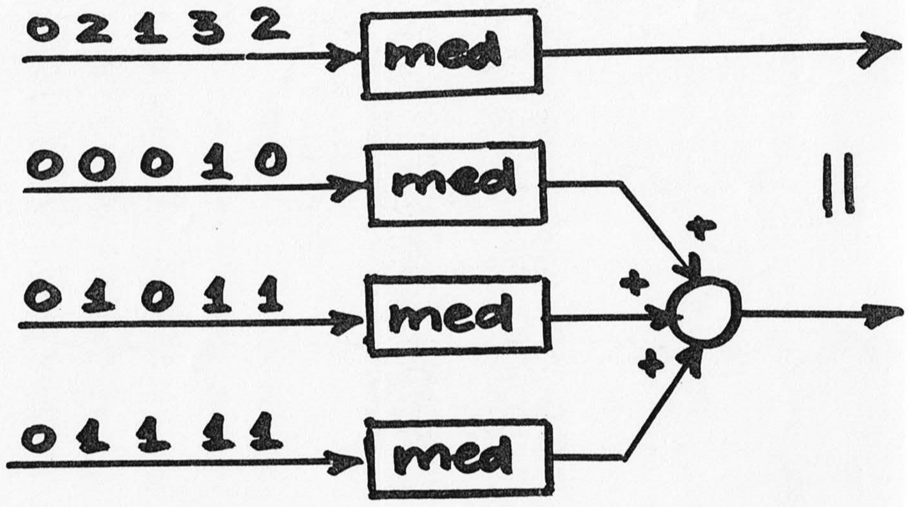
wówczas

$$x(t) = \sum_{m=1}^{M-1} x^m(t)$$

oraz

$$\mathrm{med}_K\{x(t)\} = \sum_{m=1}^{M-1} \mathrm{med}_K\{x^m(t)\}$$

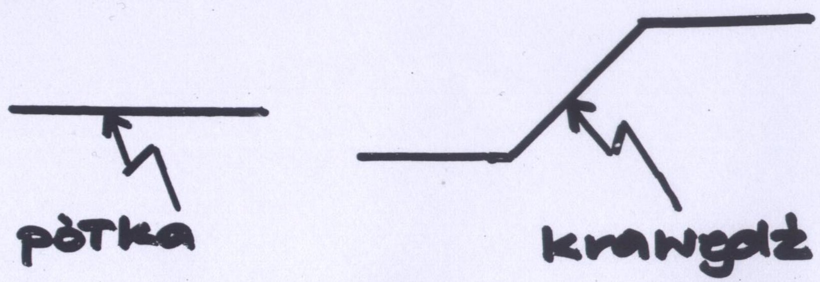
Ostatnia zależność pozwala na realizację bardzo szybkich filtrów medianowych (jeśli informacja o wartościach poszczególnych bitów jest łatwo dostępna)



Sygnały niezmiennicze względem filtracji medianowej

$$\mathrm{med}\{x(t-k), \dots, x(t), \dots, x(t+k)\} \stackrel{?}{=} x(t)$$

- półki (constant neighborhood) – co najmniej $k+1$ identycznych próbek pod rząd
- krawędzie (edges) – ciągi próbek o nierosnących lub niemalejących wartościach poprzedzone i zakończone półkami

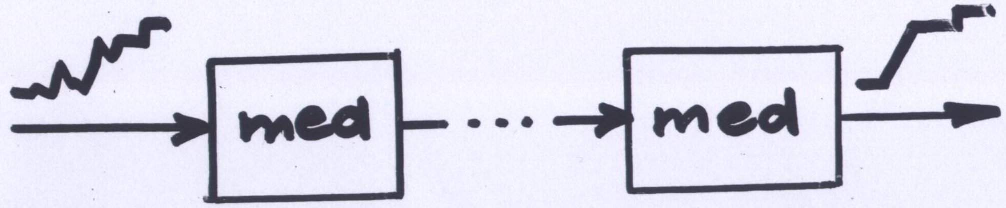


Sygnał złożony wyłącznie z krawędzi i półek jest niezmienniczy względem filtracji medianowej

root signal

Uwaga

Wielokrotne użycie filtru medianowego zamienia dowolny sygnał wejściowy o skończonej długości w sygnał niezmienniczy

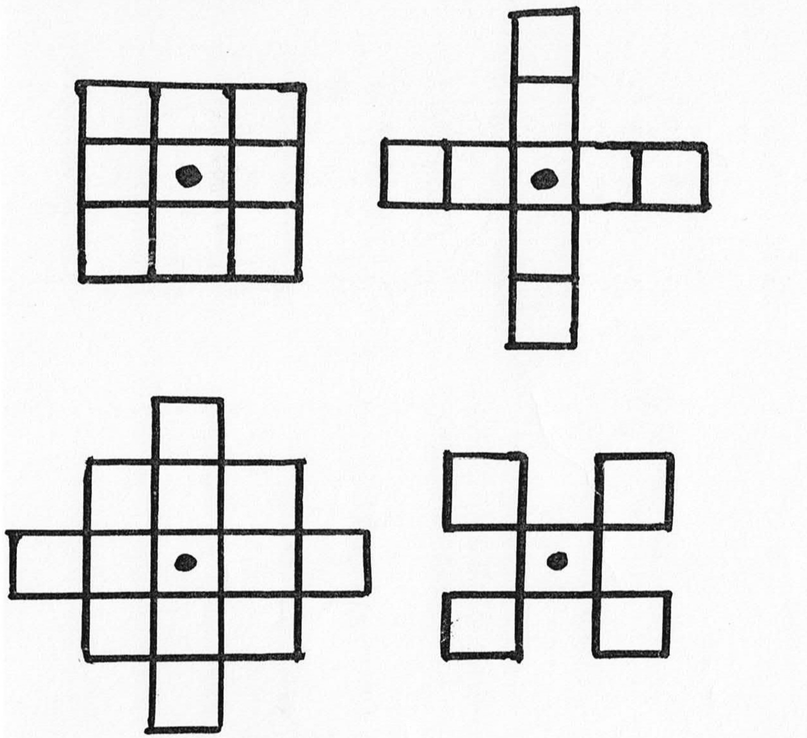


Dwuwymiarowe filtry medianowe

$$g(m,n) =$$

$$= \operatorname{med}\{ f(m-k, n-l),\ (k,l) \in W \}$$

najczęściej stosowane maski:



(a) Image with binary noise

(b) 3 × 3 median filtered

(c) image with Gaussian noise

(d) 3 × 3 median filtered.

działanie filtru medianowego

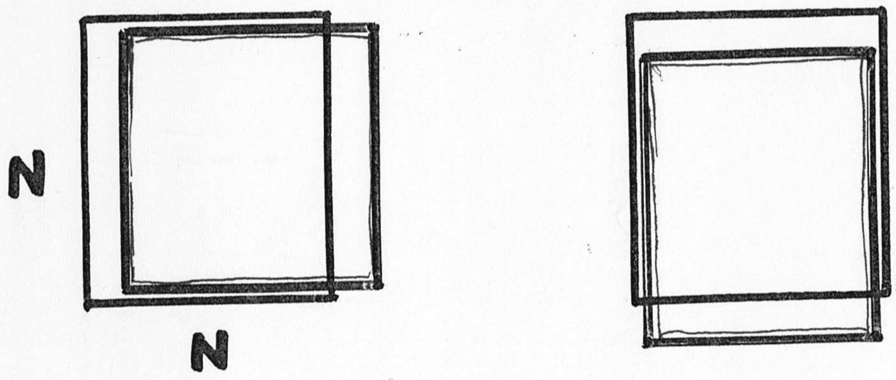
Zalety

- usuwa szum impulsowy i tłumi addytywny szum pomiarowy
- zachowuje ostre krawędzie obrazu

Wady

- usuwa z obrazu linie i zaokrągla ostre narożniki
- może tworzyć „plamy" tj. spójne obszary o stałej jasności

Algorytmy obliczeniowe



algorytm rekursywny running median

$2N$ porównań

algorytmy oparte na szybkim sortowaniu (Quicksort, Bubblesort)

$2N^2 \log_2 N$ porównań

Stosowane odmiany filtru medianowego

separowalny filtr medianowy

separable median filter

$$h(m,n)=\mathrm{med}\{f(m,n-k), \dots f(m,n), \dots, f(m,n+k)\}$$

$$g(m,n)=\mathrm{med}\{h(m-k,n), \dots h(m,n), \dots, h(m+k,n)\}$$

ważony filtr medianowy

weighted median filter

$$g(m,n)= \underset{\substack{(k,l)\in W \\ w(k,l)\in C_+}}{\mathrm{med}}\{w(k,l)\square f(m-k,n-l)\}$$

rekursywny filtr medianowy

recursive median filter

$$h(m,n)=\mathrm{med}\{h(m,n-l), \dots h(m,n-1), f(m,n) \dots f(m,n+1), \dots, f(m,n+l)\}$$

$$g(m,n)=\mathrm{med}\{g(m-k,n) \dots g(m-1,n), h(m,n) \dots h(m+1,n), \dots, h(m+k,n)\}$$

wielostopniowa filtracja medianowa

multistage median filtering

zachowuje linie nachylone pod kątem 0°, 45°, 90°, 135° oraz tworzone przez te linie narożniki

$$z_1 = \mathrm{med}\{f(m,n-k),\ldots, f(m,n),\ldots,f(m,n+k)\}$$

$$z_2 = \mathrm{med}\{f(m-k,n),\ldots, f(m,n),\ldots,f(m+k,n)\}$$

$$z_3 = \mathrm{med}\{f(m-k,n-k), \ldots f(m,n),\ldots,f(m+k,n+k)\}$$

$$z_4 = \mathrm{med}\{f(m-k,n+k), \ldots f(m,n),\ldots,f(m+k,n-k)\}$$

$$g(m,n) = \mathrm{med}\{\mathrm{med}\{z_1,z_2,f(m,n)\}, \mathrm{med}\{z_3,z_4,f(m,n)\}, f(m,n)\}$$

Filtry hybrydowe

FIR - median filters

jednowymiarowe

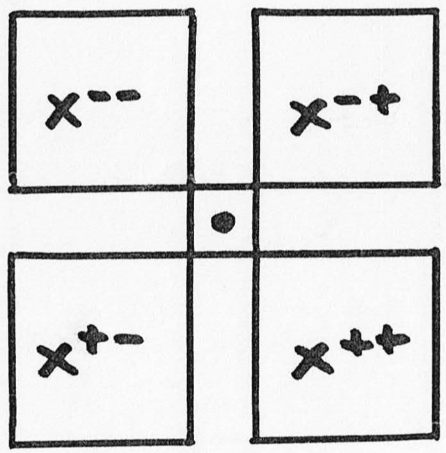
$$y(t) = \mathrm{med}\{x^-(t), x(t), x^+(t)\}$$

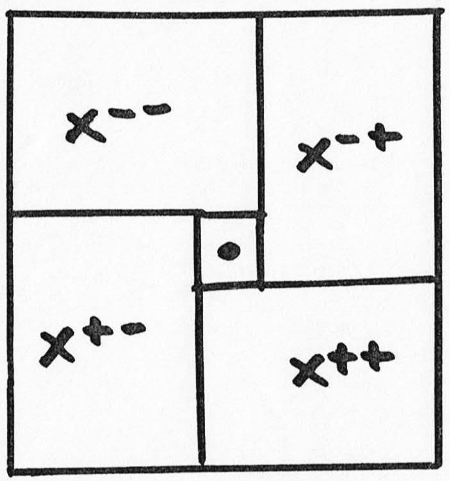
gdzie

$$x^\pm(t) = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} x(t \pm K)$$

- zachowuje ostre krawędzie
- skuteczniej tłumi addytywny szum gaussowski niż filtr medianowy
- tylko w pewnym stopniu redukuje szum impulsowy

dwuwymiarowe





Filtry oparte na statystykach porządkowych

order statistic filters

Zmodyfikowane filtry medianowe

Niechaj

$$y(t) =$$

$$= \frac{1}{2\tilde{k}+1} \sum_{i=-\tilde{k}}^{\tilde{k}} \tilde{x}(t-i)$$

gdzie $\tilde{k} = \alpha k$, $0 \leq \alpha \leq 1$
zaś $\tilde{x}(t-i)$ oznacza odpowiedni wyraz uporządkowanego ciągu $x(t-k), \ldots, x(t+k)$.

α-trimmed mean filters

Własności:

- gdy współczynnik α jest bliski 1 filtr działa podobnie jak filtr medianowy
- gdy współczynnik α jest bliski 0 filtr działa podobnie jak filtr medianowy

Filtr środkowy

$$y(t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{x}(t-k) + \tilde{x}(t+k)\right]$$

stosowany do lokalnego uśredniania w przypadku, gdy addytywny szum pomiarowy ma rozkład równomierny i nie zachowuje krawędzi

Filtry typu L

L-filters

$$y(t) = \sum_{i=-k}^{k} a_i \tilde{x}(t-i)$$

gdzie

$$a_i \geq 0$$

$$\sum_{i=-k}^{k} a_i = 1$$

Załóżmy, że

$$x(t) = x + z(t)$$

gdzie $\{z(t)\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o znanym rozkładzie

Rozważmy wskaźnik

$$E\left[(y(t) - x)^2\right] =$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=-k}^{k} a_i (\tilde{x}(t-i) - x)\right)^2\right]$$

$$= a^T R a$$

gdzie

$$R = \operatorname{cov}\left\{\begin{bmatrix} \tilde{z}(t+k) \\ \vdots \\ \tilde{z}(t-k) \end{bmatrix}\right\}$$

$$a^T = [a_k, \dots, a_{-k}]$$

Problem

Wyznaczyć wektor współczynników a spełniający warunki

$$a^T R a \longrightarrow \min$$
$$a^T e = 1$$

gdzie $e = [1, \dots, 1]^T$.

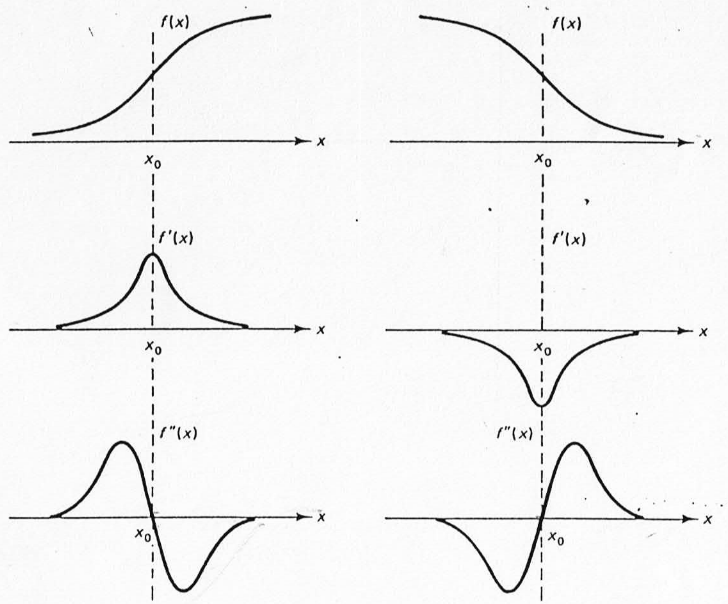
<u>Rozwiązanie</u>

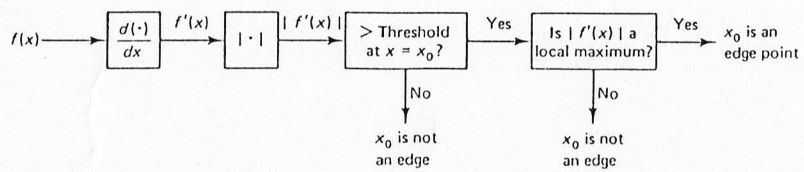
$$a = \frac{R^{-1} e}{e^T R^{-1} e}$$

- jeśli szum ma rozkład normalny filtr typu L staje się filtrem uśredniającym
- jeśli szum ma rozkład równomierny filtr typu L działa podobnie jak filtr środkowy
- jeśli szum ma rozkład Laplace'a filtr typu L działa podobnie jak filtr medianowy

Wykrywanie krawędzi

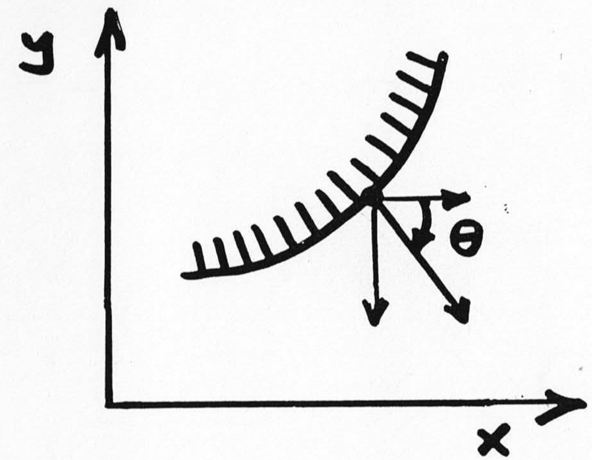
analiza dla sygnałów ciągłych jednowymiarowych





schemat detektora

analiza dla sygnałów ciągłych dwuwymiarowych



$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{bmatrix}$$

gradient Robertsa

$$f_x = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad f_y = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

gradient Prewitta

$$f_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & \boxed{0} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_y = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

gradient Sobela

$$f_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & \boxed{0} & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_y = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Wykrywanie krawędzi o określonej orientacji

directional gradients
compass operators

maski do wyznaczania gradientów kierunkowych metodą Prewitta

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \uparrow N \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \nwarrow NW$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow W \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \swarrow SW$$

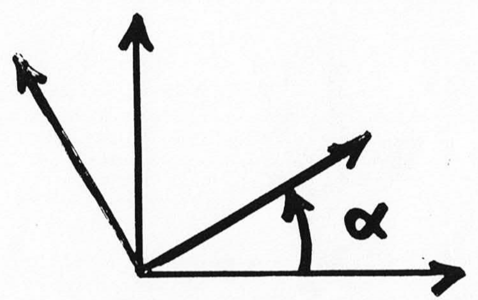
$$\Theta(x,y) = \mathrm{arctg}\left(\frac{f_y(x,y)}{f_x(x,y)}\right)$$

$$|\nabla f(x,y)| =$$

$$= \sqrt{f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}$$

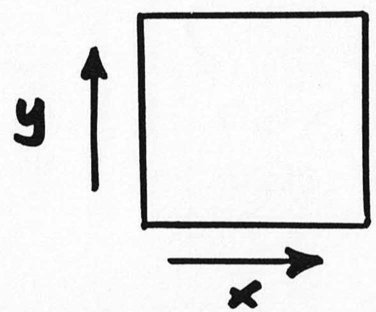
wielkość gradientu jest niezmiennicza względem obrotów na płaszczyźnie xy

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$



Wyznaczanie gradientu jasności dla dyskretnego sygnału dwuwymiarowego

gradient operators
nondirectional gradient



$$g(m,n) = \sqrt{f_x^2(m,n) + f_y^2(m,n)}$$

Aby uprościć obliczenia korzysta się niekiedy z zależności

$$g(m,n) = |f_x(m,n)| + |f_y(m,n)|$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \downarrow S \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \searrow SE$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E]{} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \nearrow NE$$

Przykłady innych masek wykorzystywanych do liczenia gradientów kierunkowych

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Kirscha ?

Wyznaczanie gradientu metodą szablonów

$$g(m,n) = \max\{|g_N(m,n)|, |g_{NW}(m,n)|, |g_W(m,n)|, |g_{SW}(m,n)|\}$$

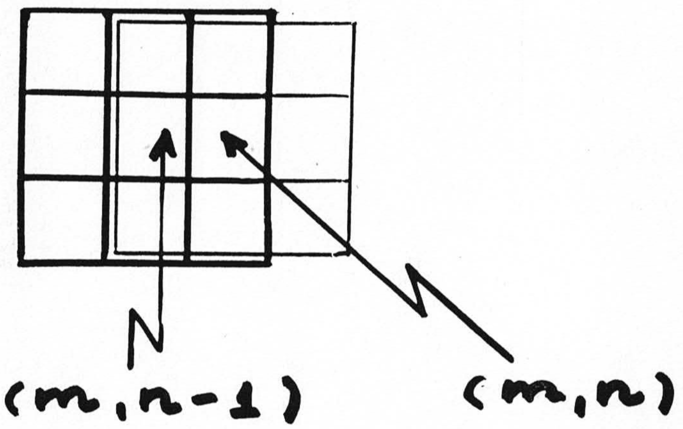
Wyznaczanie gradientu przy użyciu filtru medianowego

$$g(m,n) = C(m,n) - C(m,n-1)$$

gdzie

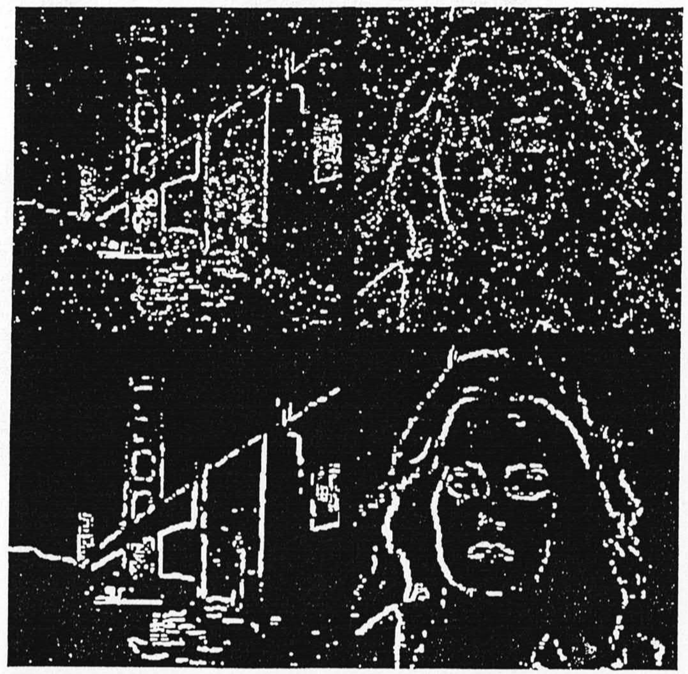
$$c(m,n) =$$

$$= \mathrm{med}\left\{ f(m+i, n+j),\ i=-k,\dots,0,\dots,k,\ j=-k,\dots,0,\dots,k \right\}$$



Metoda stochastycznego gradientu

	SNR = 1	SNR = 9
3 × 3	$\begin{array}{ccc} 0.97 & 0 & -0.97 \\ 1.00 & \boxed{0} & -1.00 \\ 0.97 & 0 & -0.97 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 0.776 & 0 & -0.776 \\ 1.00 & \boxed{0} & -1.00 \\ 0.776 & 0 & -0.776 \end{array}$
5 × 5	$\begin{array}{ccccc} 0.802 & 0.836 & 0 & -0.836 & -0.802 \\ 0.845 & 0.897 & 0 & -0.897 & -0.845 \\ 0.870 & 1.00 & \boxed{0} & -1.00 & -0.870 \\ 0.845 & 0.897 & 0 & -0.897 & -0.845 \\ 0.802 & 0.836 & 0 & -0.836 & -0.802 \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} 0.267 & 0.364 & 0 & -0.364 & -0.267 \\ 0.373 & 0.562 & 0 & -0.562 & -0.373 \\ 0.463 & 1.00 & \boxed{0} & -1.00 & -0.463 \\ 0.373 & 0.562 & 0 & -0.562 & -0.373 \\ 0.267 & 0.364 & 0 & -0.364 & -0.267 \end{array}$
7 × 7	$\begin{array}{ccccccc} 0.641 & 0.672 & 0.719 & 0 & -0.719 & -0.672 & -0.641 \\ 0.656 & 0.719 & 0.781 & 0 & -0.781 & -0.719 & -0.656 \\ 0.688 & 0.781 & 0.875 & 0 & -0.875 & -0.781 & -0.688 \\ 0.703 & 0.813 & 1.00 & \boxed{0} & -1.00 & -0.813 & -0.703 \\ 0.688 & 0.781 & 0.875 & 0 & -0.875 & -0.781 & -0.688 \\ 0.656 & 0.719 & 0.781 & 0 & -0.781 & -0.719 & -0.656 \\ 0.641 & 0.672 & 0.719 & 0 & -0.719 & -0.672 & -0.641 \end{array}$	$\begin{array}{ccccccc} 0.073 & 0.240 & 0.283 & 0 & -0.283 & -0.140 & -0.073 \\ 0.104 & 0.213 & 0.348 & 0 & -0.348 & -0.213 & -0.104 \\ 0.165 & 0.354 & 0.579 & 0 & -0.579 & -0.354 & -0.165 \\ 0.195 & 0.463 & 1.00 & \boxed{0} & -1.00 & -0.463 & -0.195 \\ 0.165 & 0.354 & 0.579 & 0 & -0.579 & -0.354 & -0.165 \\ 0.104 & 0.213 & 0.348 & 0 & -0.348 & -0.213 & -0.104 \\ 0.073 & 0.140 & 0.283 & 0 & -0.238 & -0.140 & -0.073 \end{array}$



Porównanie metody Sobela (góra) oraz metody stochastycznego gradientu (dół); SNR = 10dB

Tworzenie map krawędzi

edge maps

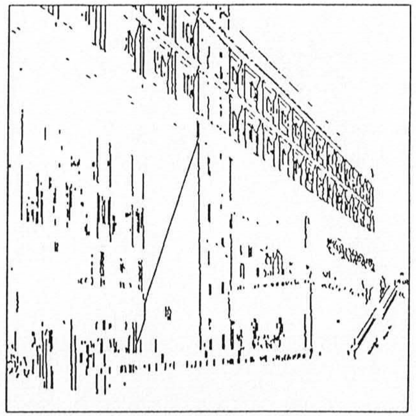
$$e(m,n) = \begin{cases} 1 & g(m,n) > g_0 \\ 0 & g(m,n) \le g_0 \end{cases}$$

Próg g_0 wybiera się najczęściej tak, aby warunek $g(m,n) > g_0$ był spełniony dla 5% - 10% pikseli

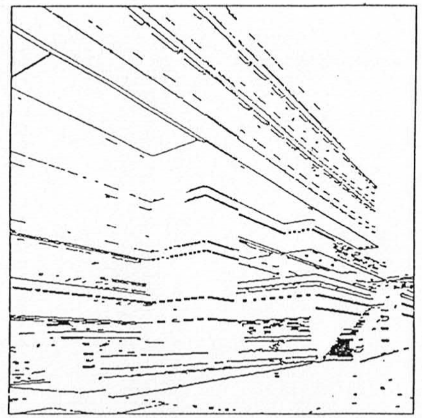
metoda adaptacyjnego doboru progu

$$g_0(m,n) = \bar{g}(m,n)(1+\varepsilon)$$

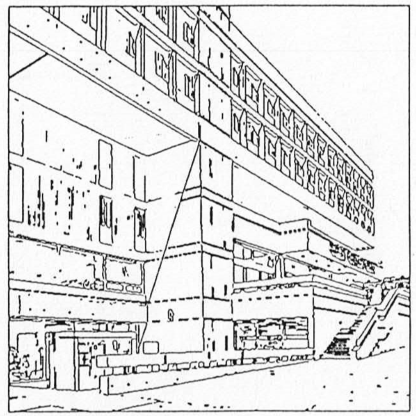
gdzie $\bar{g}(m,n)$ oznacza średnią wartość sygnału $g(m,n)$ w pewnym obszarze lokalnym o środku w punkcie (m,n)



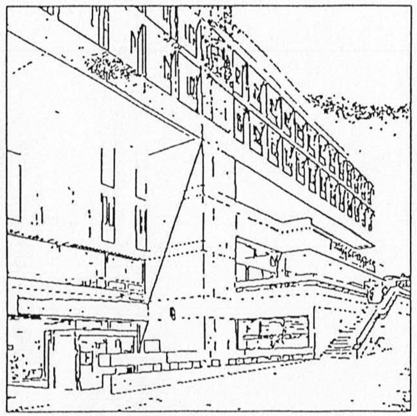
pionowy



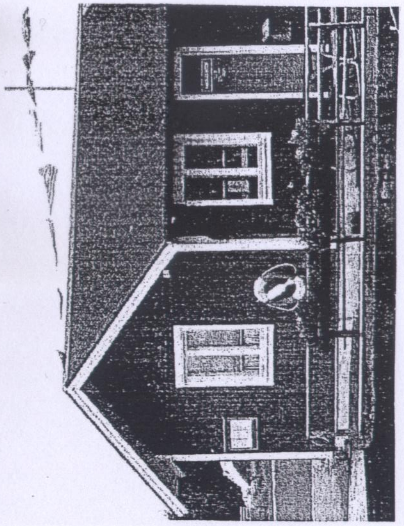
poziomy



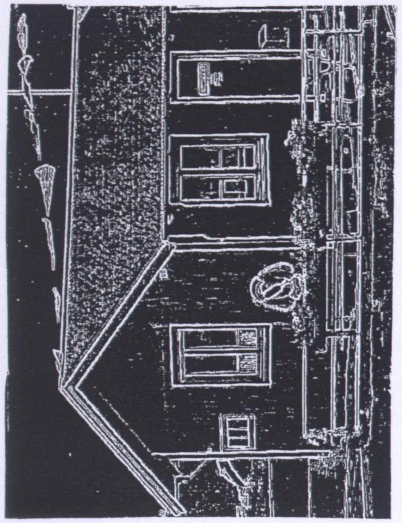
Sobela



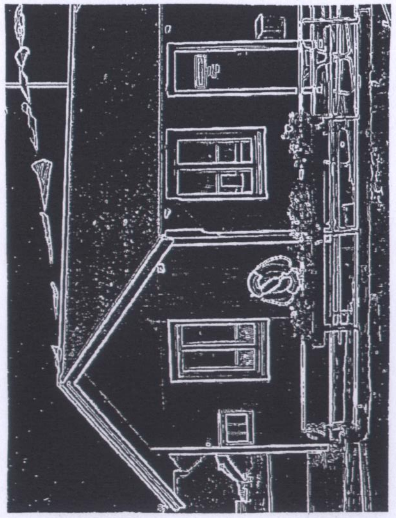
Robertsa



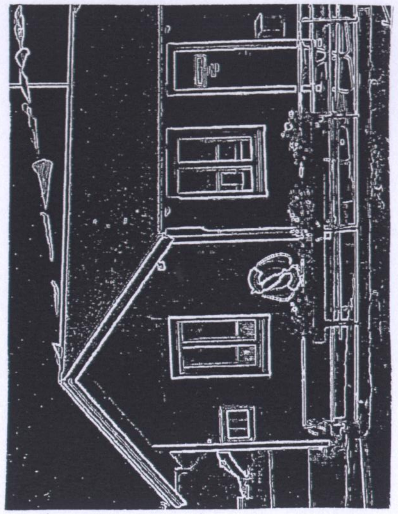
oryginał



Roberts



Sobel



Prewitt

Metoda Canny'ego (1986)

Krok 1

Wygładzanie obrazu przy użyciu filtru Gaussa z maską o wymiarach K×K i wariancją σ^2

$$f(m,n) = o(m,n) ** h(m,n)$$

$o(m,n)$ – obraz oryginalny
$h(m,n)$ – odpowiedź impulsowa filtru Gaussa
$f(m,n)$ – obraz wygładzony

analogowy „prototyp" filtru Gaussa

$$h(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$