Przykłady dyskretnych aproksymacji odpowiedzi impulsowej filtru Gaussa $h(m,n)$ dla $K=5$

filtr separowalny :

$$\frac{1}{16}\begin{bmatrix}1 & 4 & 6 & 4 & 1\end{bmatrix} * \frac{1}{16}\begin{bmatrix}1\\4\\6\\4\\1\end{bmatrix} \qquad \sigma^2=1$$

filtr nieseparowalny :

$$\frac{1}{159}\begin{bmatrix}2 & 4 & 5 & 4 & 2\\4 & 9 & 12 & 9 & 4\\5 & 12 & 15 & 12 & 5\\4 & 9 & 12 & 9 & 4\\2 & 4 & 5 & 4 & 2\end{bmatrix} \qquad \sigma^2=2$$

Krok 2

Wyznaczenie, w każdym punkcie obrazu, wartości gradientu jasności

$$g(m,n) = \sqrt{f_x^2(m,n) + f_y^2(m,n)}$$

oraz jego orientacji

$$\theta(m,n) = \mathrm{arctg}\left(\frac{f_y(m,n)}{f_x(m,n)}\right)$$

Do aproksymacji pochodnych kierunkowych $f_x(m,n)$ i $f_y(m,n)$ stosuje się zazwyczaj metodę Robertsa, Prewitta lub Sobela.

Krok 3

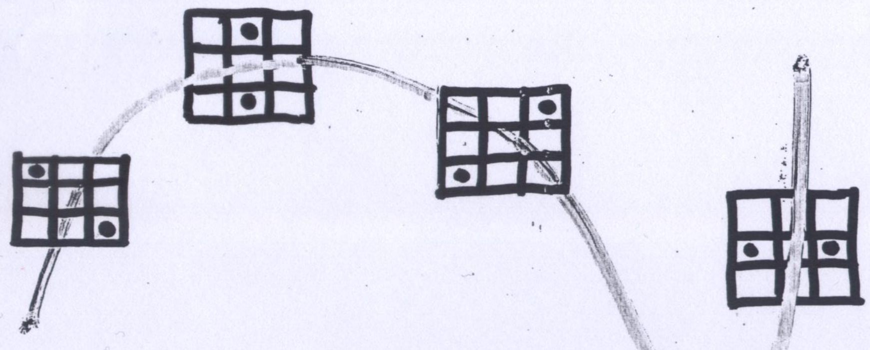
Utworzenie mapy „słabych" punktów krawędziowych K_{min} poprzez progowanie gradientu z dolnym progiem g_{min}

$$g(m,n) \geq g_{min} \Rightarrow (m,n) \in K_{min}$$

Krok 4

Pocienianie krawędzi poprzez usunięcie punktów „niemaksymalnych" (nonmaxima suppression)

Sprawdzamy wartość gradientu w dwóch punktach sąsiadujących z punktem badanym (m,n), w kierunku zgodnym z orientacją gradientu (tj. wzdłuż linii prostopadłej do krawędzi). Orientacja gradientu $\Theta(m,n)$ zaokrąglana jest do jednego z czterech kierunków podstawowych (0°, 45°, 90°, 135°)



Zachowujemy tylko te punkty, w których gradient jest większy niż w obu wspomnianych wyżej punktach sąsiednich.

Krok 5

Utworzenie mapy „silnych" punktów krawędziowych K_{max} poprzez usunięcie z mapy K_{min} punktów (m,n), dla których

$$g(m,n) \geqslant g_{max}$$

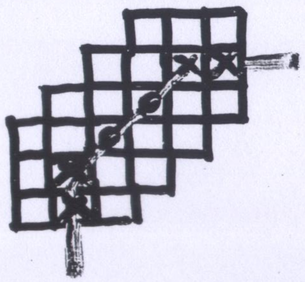
gdzie g_{max}, $g_{max} > g_{min}$, oznacza górny próg (zazwyczaj przyjmuje się $g_{max} = 2g_{min}$)

$$K_{max} \subset K_{min}$$

Krok 6

Utworzenie wynikowej mapy punktów krawędziowych $\mathcal{K}$ poprzez zastosowania progowania z histerezą.

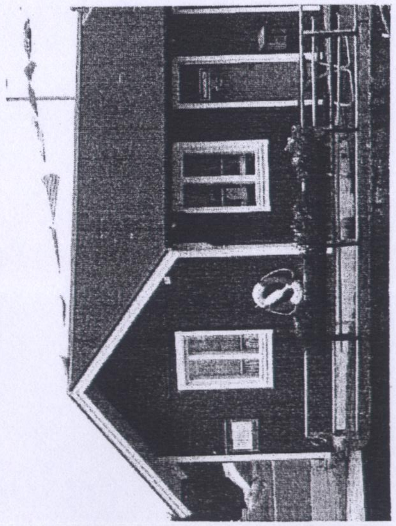
Do „silnych" punktów krawędziowych dołączamy, w trybie sekwencyjnym, te punkty „słabe", które znajdują się w bezpośrednim sąsiedztwie punktów „silnych", bądź wcześniej dołączonych punktów „słabych".



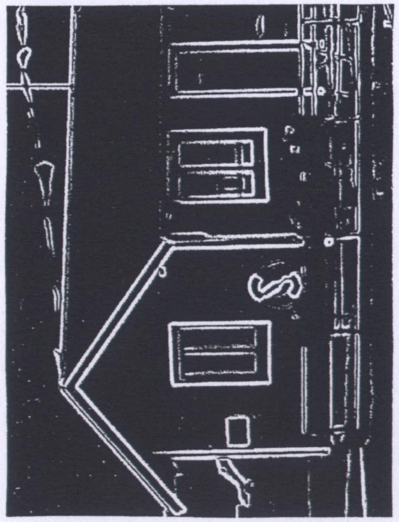
● „silny" punkt krawędziowy

x „słaby" punkt krawędziowy

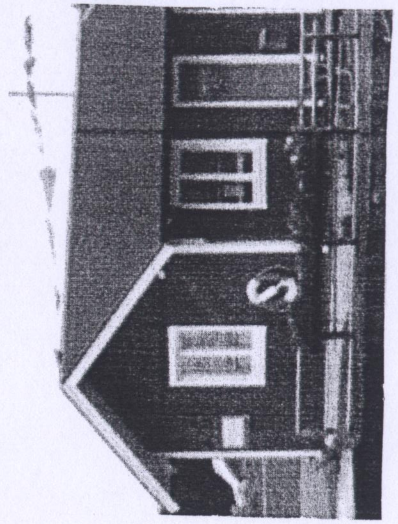
$\mathcal{K}_{max} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{K}_{min}$



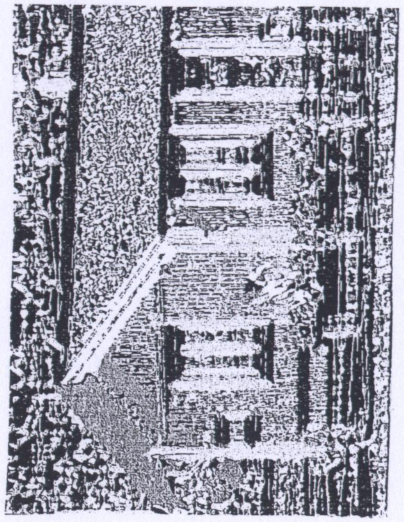
$o(m,n)$



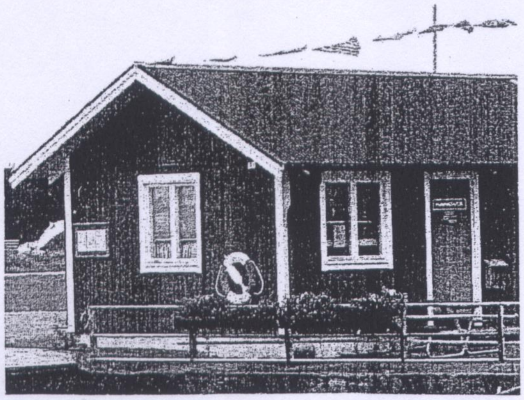
$g(m,n)$



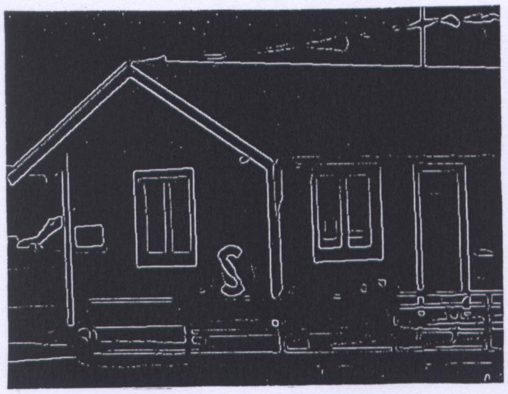
$o(m,n) ** h(m,n)$



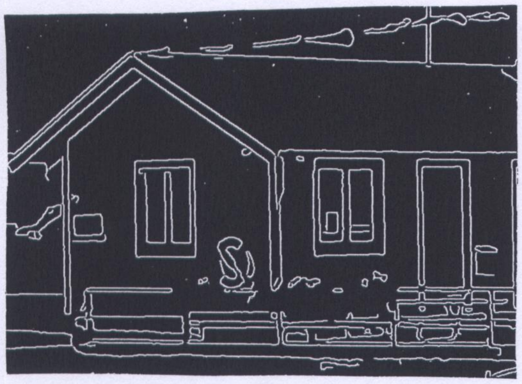
$\Theta(m,n)$



$o(m,n)$



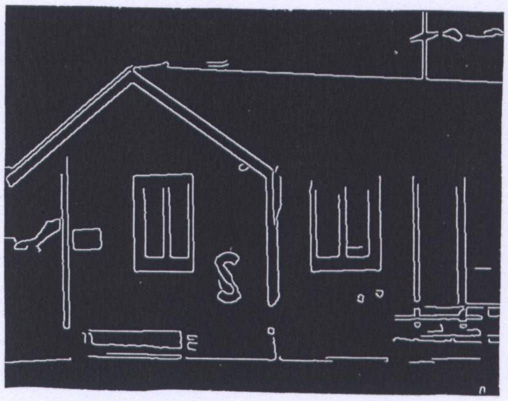
$c(m,n)$



$\sigma = 3$

$g_{min} = 25$

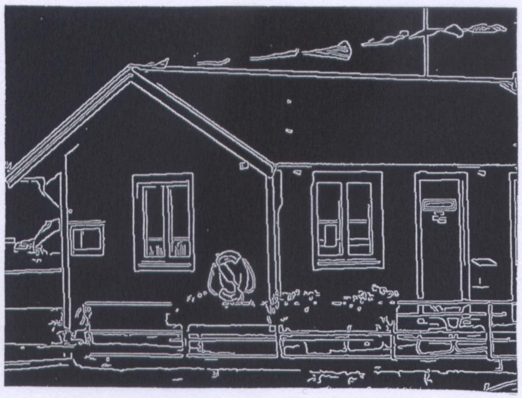
$g_{max} = 75$



$\sigma = 3$

$g_{min} = 75$

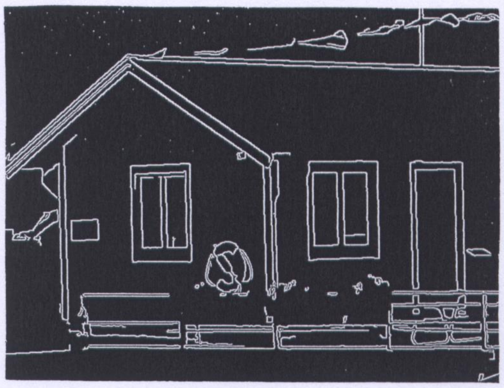
$g_{max} = 125$



$\sigma = 1$

$g_{min} = 75$

$g_{max} = 125$



$\sigma = 1$

$g_{min} = 75$

$g_{max} = 250$

Metody wykorzystujące Laplasjan

Laplasjanem dwuwymiarowego sygnału ciągłego $f(x,y)$ nazywamy funkcję

$$\nabla^2 f(x,y) =$$

$$= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

W przypadku sygnałów dyskretnych możemy się posłużyć następującymi przybliżeniami

$$f_x(m,n) = f(m,n+1) - f(m,n)$$

różnica „w przód"

$$f_{xx}(m,n) = f_x(m,n) - f_x(m,n-1)$$

różnica „w tył"

Stąd

$$f_{xx}(m,n) = f(m,n+1) - 2f(m,n) + f(m,n-1)$$

Podobnie

$$f_{yy}(m,n) = f(m+1,n) - 2f(m,n) + f(m-1,n)$$

a zatem

$$L(m,n) = f_{xx}(m,n) + f_{yy}(m,n) = f(m+1,n) + f(m-1,n) + f(m,n+1) + f(m,n-1) - 4f(m,n)$$

	1	
1	-4	1
	1	

Inne stosowane aproksymacje

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

-1	2	-1
2	-4	2
-1	2	-1

Wykrywanie krawędzi przy użyciu laplasjanu

Sprawdzamy przejścia przez zero w kierunku x lub y funkcji $L(m,n)$

$(m_0, n_0) \in K$ jeżeli :

$L(m_0,n_0)L(m_0,n_0+1) \leqslant 0$

lub

$L(m_0,n_0)L(m_0+1,n_0) \leqslant 0$

Własności

- nie ma potrzeby pocieniania wykrytych krawędzi
- metoda jest bardzo wrażliwa na lokalne zmiany jasności a więc również na szum

Aby obniżyć czułość detektora wprowadza się dodatkowy warunek postaci

$$\sigma_f^2(m_0,n_0) > \sigma_0^2$$

gdzie σ_0^2 oznacza próg (dobierany eksperymentalnie) zaś $\sigma_f^2(m_0, n_0)$ jest lokalną oceną wariancji sygnału $f(m,n)$ np.

$$\sigma_f^2(m,n) =$$

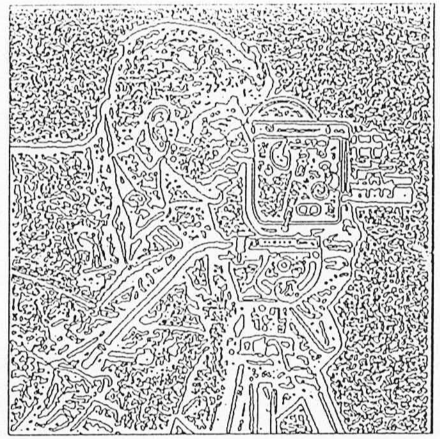
$$= \frac{1}{(2K+1)^2} \sum_{i=-K}^{K} \sum_{j=-K}^{K} \left[f(m+i, n+j) - \mu_f(m+i, n+j) \right]^2$$

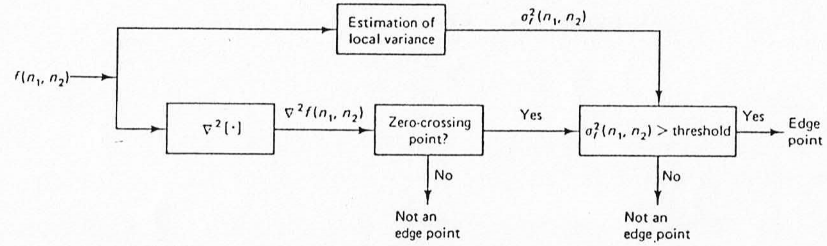
gdzie

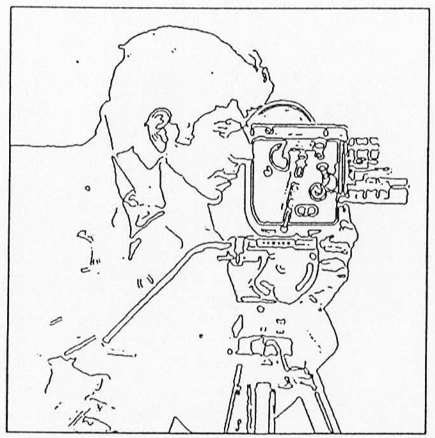
$$\mu_f(m,n) =$$

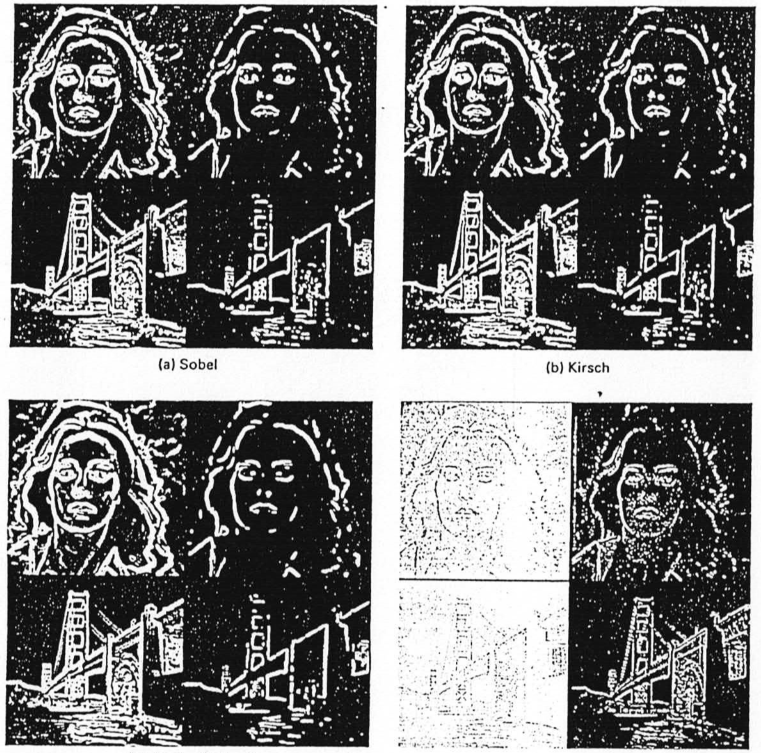
$$= \frac{1}{2K+1} \sum_{i=-K}^{K} \sum_{j=-K}^{K} f(m+i, n+i)$$

zaś K najczęściej przyjmuje wartości 1, 2 lub 3









(a) Sobel (b) Kirsch

(c) Stochastic 5 × 5 (d) Laplacian

Porównanie czterech metod wykrywania krawędzi (obrazy bez szumu)

Wykrywanie linii na mapie krawędzi

metoda szablonów

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

transformacja Hougha

maksymalna liczba linii, które można przeprowadzić przez dowolne dwa piksele należące do zbioru krawędzi $\mathcal{K}$ wynosi $N_{\mathcal{K}} \cdot (N_{\mathcal{K}} - 1)/2$

Obserwacja

każdej prostej o równaniu

$$y = ax + b$$

odpowiada w przestrzeni parametrów punkt (a, b)

algorytm wyszukiwania linii prostych:

1. dyskretyzujemy parametry a i b
   $a : a_1 < a_2 < \dots < a_K$
   $b : b_1 < b_2 < \dots < b_L$
2. tworzymy $K \times L$-wymiarową macierz wykryć $H(a, b)$ i nadajemy wszystkim elementom wartości zerowe

3. dla wszystkich pikseli $(m,n) \in \mathcal{K}$ oraz wszystkich zdyskretyzowanych wartości a_i wyznaczamy odpowiednie wartości b_j:

$$b_j = (m - a_i n)_q$$

a następnie zwiększamy wartość stosownego elementu macierzy $H(a,b)$ o 1:

$$H(a_i, b_j) := H(a_i, b_j) + 1$$

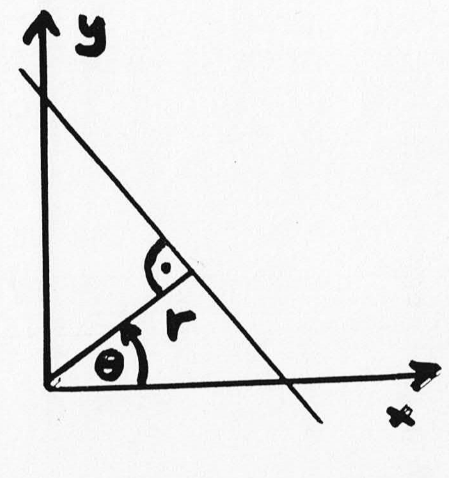
4. wyszukujemy wszystkie pary (a_i, b_j), które spełniają warunek

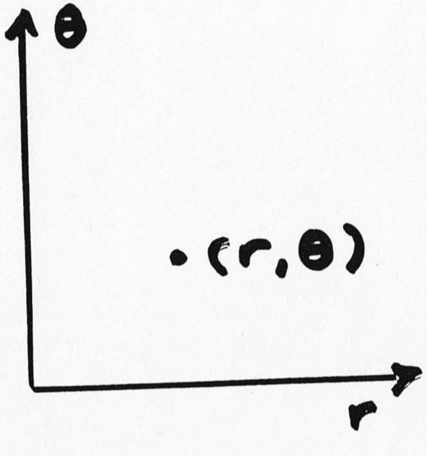
$$H(a_i, b_j) > H_{min}$$

Wada

W przypadku pionowych linii $a = \infty$ co oznacza, że przyjęta parametryzacja prostej nie jest wygodna z punktu widzenia kwantyzacji

Aby ułatwić kwantyzację parametrów stosuje się współrzędne biegunowe





$$r = x\cos\theta + y\sin\theta$$

Obserwacje

- wszystkim liniom prostym przechodzącym przez punkt (x_0, y_0) na płaszczyźnie xy odpowiada na płaszczyźnie $r\theta$ sinusoida o równaniu

$$r = x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta$$

- punktom współliniowym na płaszczyźnie xy odpowiadają przecięcia sinusoid na płaszczyźnie $r\theta$

algorytm wyszukiwania linii prostych:

1. dyskretyzujemy parametry r i θ

$$r : r_1 < r_2 < \dots < r_K$$

$$\theta : \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_L$$

$$-R_{max} \leq r \leq R_{max}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

gdzie

$$R_{max} = \sqrt{M^2 + N^2}$$

2. tworzymy $K \times L$-wymiarową macierz wykryć $H(r, \theta)$ i nadajemy wszystkim elementom wartości zerowe

3. dla wszystkich pikseli $(m,n) \in \mathcal{K}$ oraz wszystkich zdyskretyzowanych wartości θ_j wyznaczamy odpowiednie wartości r_i

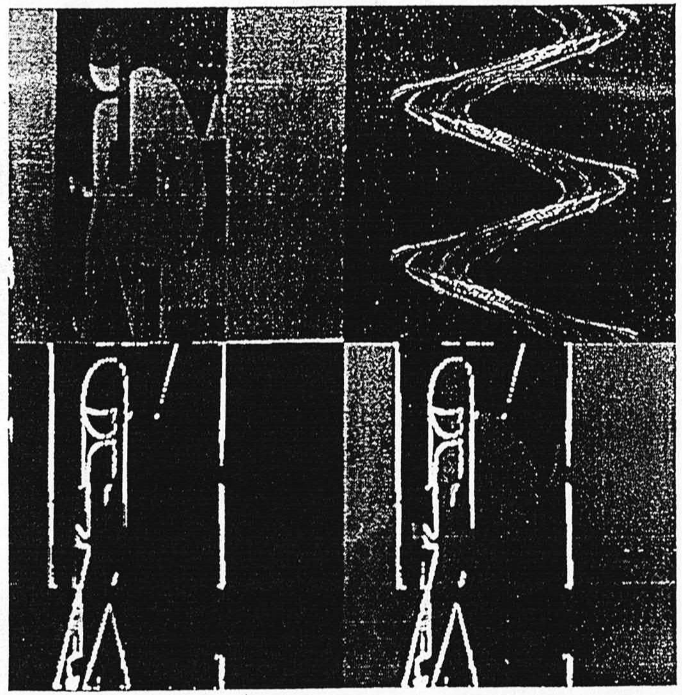
$$r_i = (n\cos\theta_j + m\sin\theta_j)_q$$

a następnie zwiększamy wartość stosownego elementu macierzy $H(r,\theta)$ o 1

$$H(r_i,\theta_j) := H(r_i,\theta_j) + 1$$

4. wyszukujemy wszystkie pary (r_i,θ_j), które spełniają warunek

$$H(r_i,\theta_j) > H_{min}$$

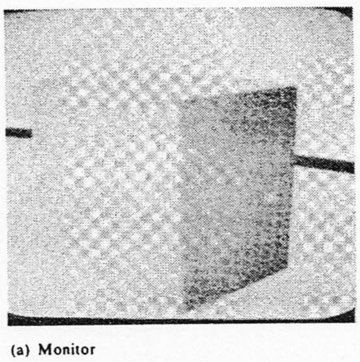


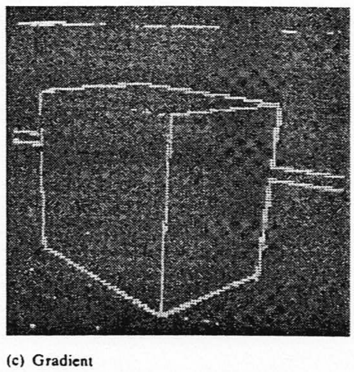
Zastosowanie transformaty Hougha

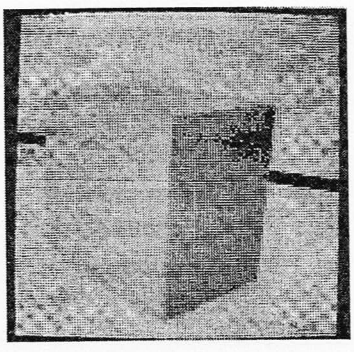
Table I. Accumulator Array for Figure 3(c)

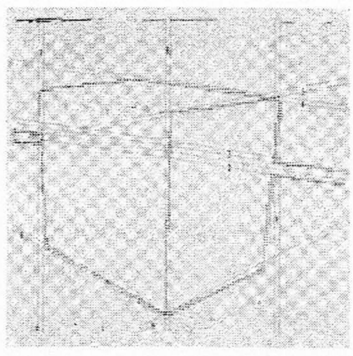
ρ \ θ	0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°
85								2	
83							1	2	
81							4	4	
79			2				6	5	
77				2			8	4	2
75							6	6	2
73							4	3	3
71		2		1		1	4	2	3
69			1	4		12	4	3	5
67			3		2	14	2	3	4
65			1			11	1	2	4
63					5	2		2	4
61						1		3	9
59	4	1			11	9	1	8	12
57	4	3		3	10	12	3	10	15
55	9	5		4	5	4	5	11	12
53	6	6		4	10		11	9	14
51	4	9		4	20	2	11	10	8
49	5	6		2	10	3	11	13	8
47	8	4	4	4		2	13	10	10
45	4	7	14	3			11	6	8
43	4	18	21	5		1	12	10	8
41	9	17	21	15		25	18	7	8
39	8	20	21	13		22	11	11	7
37	12	17	22	17		9	10	9	10
35	38	14	17	17	38	8	7	9	6
33	37	16	22	21	42	10	5	9	9
31	35	11	21	23	23	8	11	9	10
29	13	18	18	23	20	14	13	9	9
27	7	16	12	30	20	20	7	9	6
25	7	18	12	32	19	27	8	7	8
23	8	12	11	20	17	52	11	6	7
21	7	17	12	23	8	11	15	11	10
19	9	14	12	16	7	7	14	6	7
17	9	12	12	16	6	9	16	12	7
15	8	13	13	11	7	10	16	14	10
13	10	9	15	11	7	10	16	13	6
11	12	11	13	14	40	10	16	13	13
9	10	10	16	14	8	9	14	21	22
7	10	8	22	12	41	6	7	12	21
5	11	12	15	11	23	6	11	14	14
3	13	15	15	8	18	7	11	16	15
1	10	14	17	11	7	8	9	10	12

ρ \ θ	0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°
−85									
−83									
−81									
−79			3	1					
−77			1	3					
−75									
−73									
−71		2							
−69		2							
−67									
−65			1	2					
−63		1			2				
−61	5								
−59	7		2	1		1			
−57	6					2	1		2
−55	0	10	6			1	1		4
−53	16	13	12		18	4	1		6
−51	40	15	11		15	16			6
−49	32	18	11	57	15	23	1	1	5
−47	10	16	11	22	14	16	21	9	5
−45	7	17	11	11	16	18	41	21	6
−43	8	12	14	10	13	17	12	17	6
−41	6	7	14	11	14	14	7	19	12
−39	7	10	9	8	12	8	11	20	23
−37	7	7	14	8	17	9	12	18	24
−35	8	9	17	8	10	7	10	23	23
−33	6	12	15	8	12	9	11	22	26
−31	5	9	19	9	8	11	16	18	15
−29	9	10	12	9	8	9	18	18	15
−27	7	12	10	8	6	9	18	19	19
−25	5	10	8	8	7	7	22	9	14
−23	6	11	9	9	6	11	19	12	9
−21	7	15	9	7	10	10	16	10	11
−19	6	13	8	16	9	11	17	9	10
−17	7	17	9	15	7	11	16	14	13
−15	6	15	10	17	8	13	10	14	9
−13	10	15	9	15	9	17	11	13	12
−11	10	13	10	7	8	17	9	11	15
−9	7	14	8	7	8	23	8	12	15
−7	9	15	12	7	8	21	7	13	12
−5	77	13	15	9	7	14	10	12	15
−3	26	14	14	6	8	12	9	11	18
−1	10	13	18	9	8	8	11	12	15


(a) Monitor


(c) Gradient


(b) Digitized


(d) Lines

Złożoność obliczeniowa transformacji Hougha

$$O(N_{\mathcal{K}} \cdot N_Q)$$

gdzie $N_{\mathcal{K}}$ oznacza liczbę pikseli tworzących zbiór $\mathcal{K}$, zaś N_Q jest przyjętą liczbą poziomów kwantyzacji parametru a lub θ

W przypadku, gdy detektor krawędzi dostarcza zarówno informacji o położeniu pikseli tworzących zbiór $\mathcal{K}$ jak o nachyleniu krawędzi w każdym punkcie, złożoność obliczeniową można obniżyć do

$$O(N_{\mathcal{K}})$$

Uogólnienia

Metoda pozwala na wykrywanie dowolnych krzywych opisanych równaniem

$$f(x, y; \alpha) = 0$$

gdzie α jest wektorem parametrów, np.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$H(a, b, r)$$

$$m, n, r_i$$

$$\downarrow$$

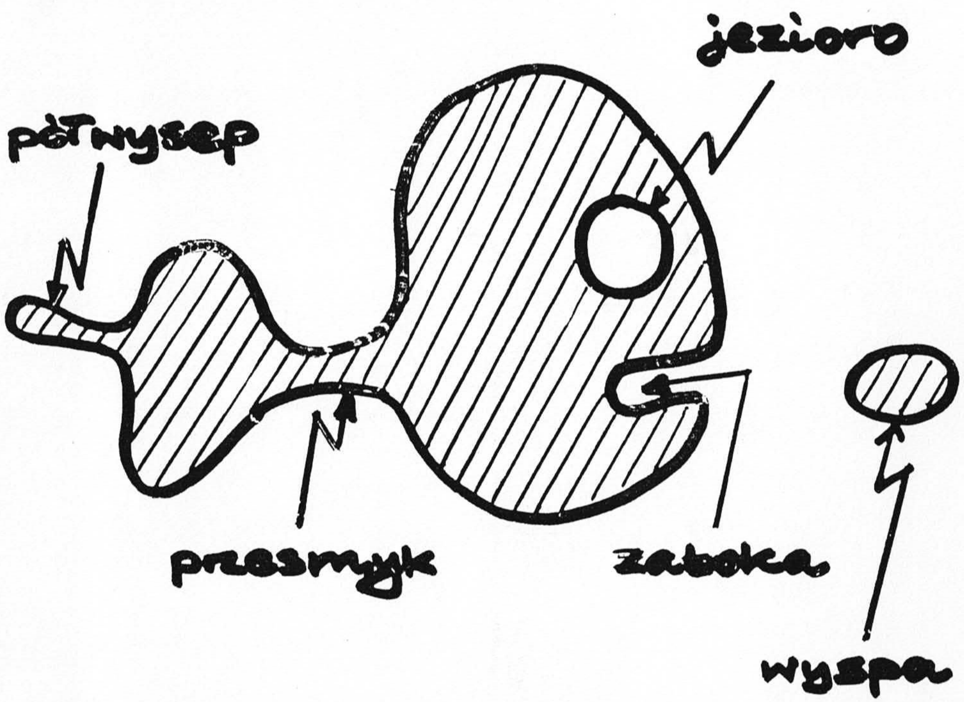
$$a_j = (n - r_i \cos\theta_j)_q$$
$$b_j = (m - r_i \sin\theta_j)_q$$

Przekształcenia morfologiczne

morphological transformations

morfologia – nauka o budowie i kształtach roślin i zwierząt

terminologia geograficzna:



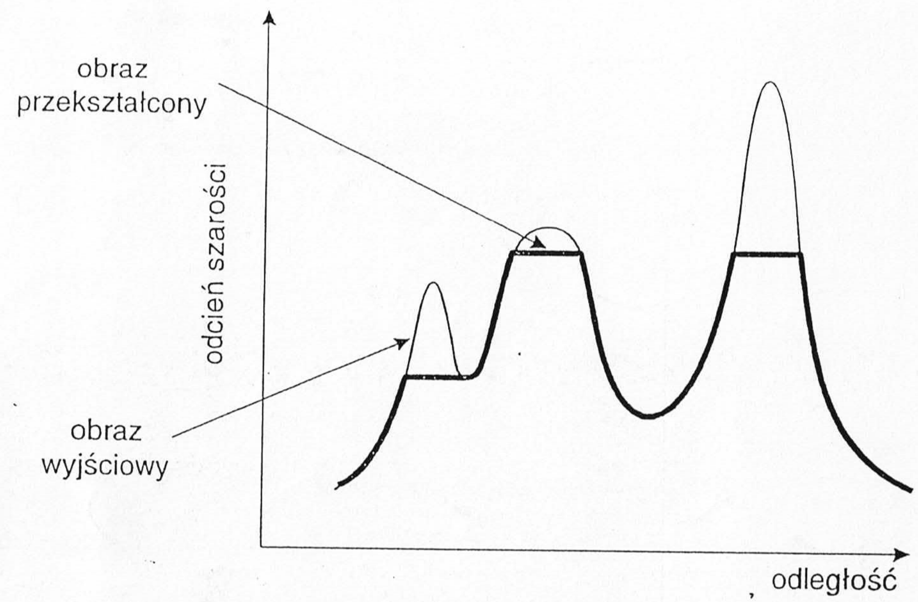
Erozja

erosion

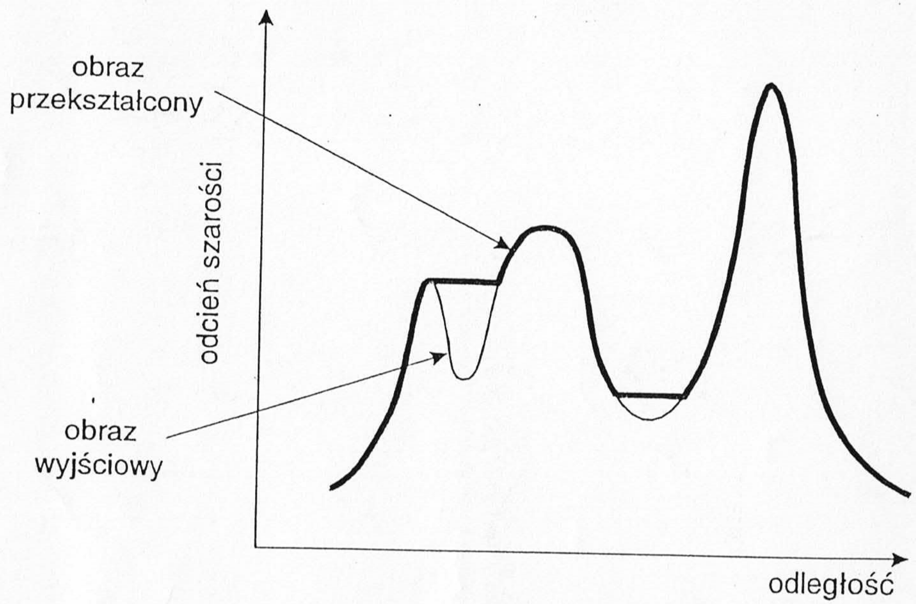
Rozważmy dowolny obszar X na płaszczyźnie oraz tzw. element strukturalny B(x,y) w kształcie koła o promieniu r i środku w punkcie (x,y)

Erozją obszaru X przy użyciu elementu B nazywamy zbiór środków wszystkich kół o promieniu r, które zawarte są w obszarze X.

$$\{(x,y) : B(x,y) \subset X\}$$



otwarcie



zamknięcie

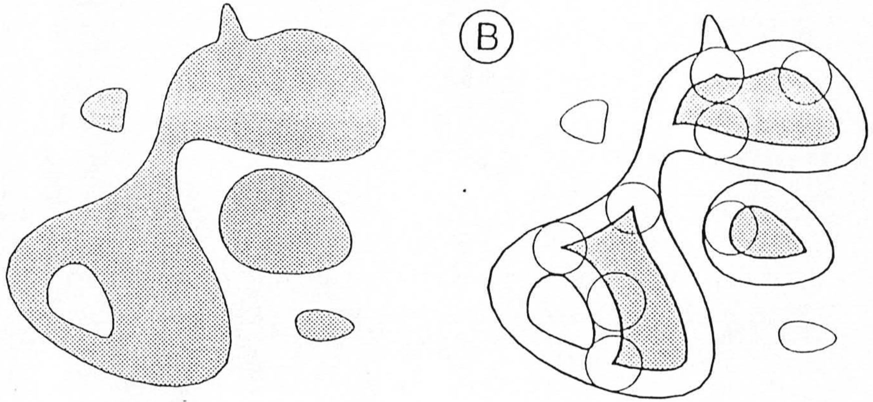
Usuwanie szumu impulsowego typu „pieprz z solą” (a)

(b) otwarcie obrazu elementem 2×2

(c) otwarcie + zamknięcie obrazu

(d) wynik filtracji medianowej z oknem 3×3

Erozja

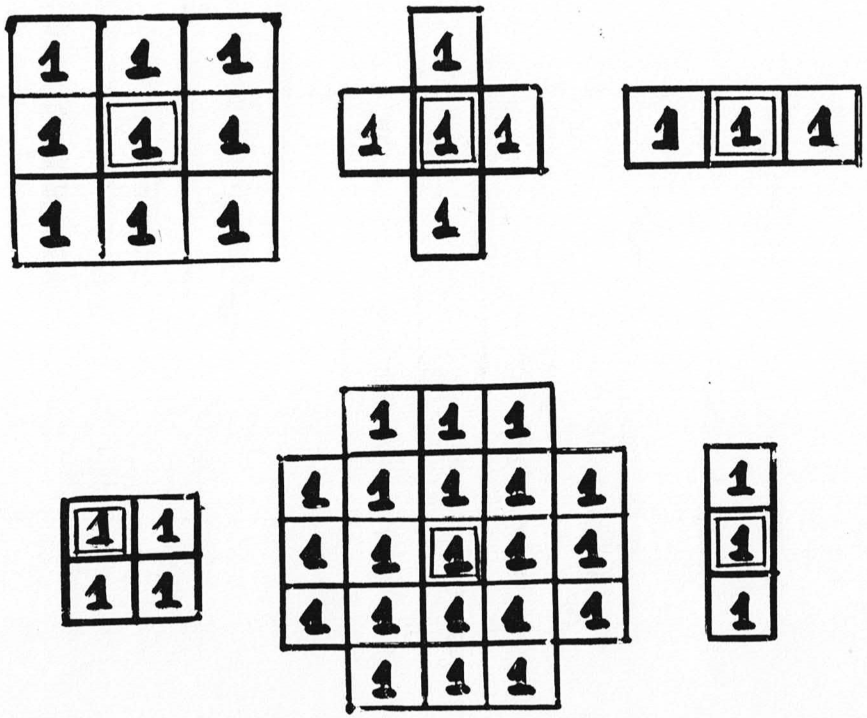


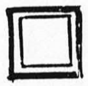
własności :

- usuwa drobne szczegóły (wyspy, półwyspy) oraz wygładza brzeg obszaru
- dzieli obszar na podobszary (jeżeli przesmyki łączące poszczególne podobszary są wystarczająco wąskie)
- zmniejsza powierzchnię badanego obszaru

Erozja obrazów binarnych

najczęściej stosowane elementy strukturalne B(m, n)



 – element środkowy

„Programowanie" elementu strukturalnego w oparciu o szablon o standardowym kształcie

X	1	X
1	$\boxed{1}$	1
X	1	X

$\boxed{X}$ – element neutralny (nie brany pod uwagę podczas analizy)

$B^*(m,n)$ – element strukturalny otrzymany w wyniku zastosowania symetrii środkowej względem punktu (m,n) do elementu $B(m,n)$

$$E_B(X) = X \ominus B \triangleq$$
$$= \{(m,n) : B(m,n) \subset X\}$$

wektory translacji związane z elementem strukturalnym

$\boxed{1}$	1
1	1

$$B = \{(0,0), (0,1), (-1,0), (-1,-1)\}$$

X_b – obszar otrzymany w wyniku translacji X o wektor b

$$E_B(X) = \bigcap_{b \in B^*} X_b \subset X$$

gdzie B^* oznacza zbiór wektorów translacji związanych z elementem strukturalnym $B^*(m, n)$

zastosowanie - przetwarzanie równoległe

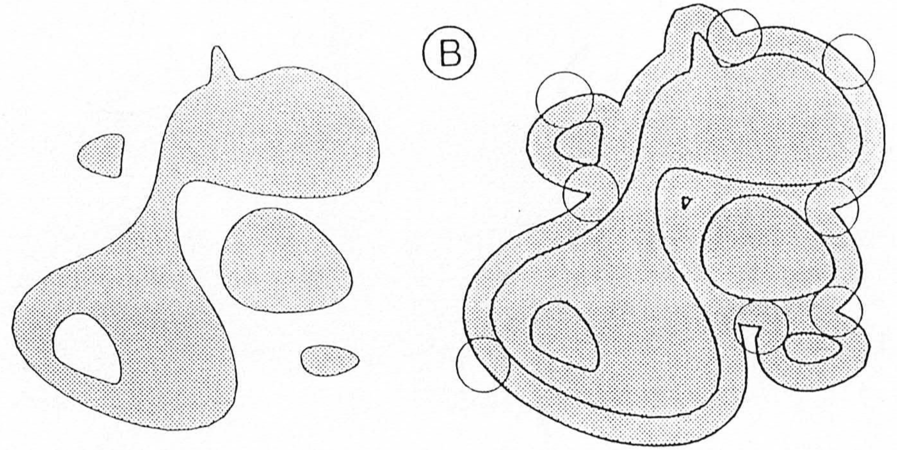
Dylatacja

dilation

Dylatacją obszaru X przy użyciu elementu B nazywamy zbiór środków wszystkich kół o promieniu r, które mają przynajmniej jeden punkt wspólny z X

$$\{(x,y) : B(x,y) \cap X \neq \emptyset\}$$

Dylatacja



własności:

- zasypuje małe jeziora i wąskie zatoki
- skleja obszary położone blisko siebie
- zwiększa powierzchnię badanego obszaru

Dylatacja obrazów binarnych

$$D_B(X) = X \oplus B \triangleq$$

$$= \{(m,n) : B(m,n) \cap X \neq \emptyset\}$$

$$= \bigcup_{b \in B} X_b \supset X$$

Uwaga

Erozja i dylatacja są przekształceniami dualnymi

$$X \ominus B = \overline{(\overline{X} \oplus B)}$$

$$X \oplus B = \overline{(\overline{X} \ominus B)}$$

gdzie $\overline{X} = \Omega - X$ oznacza dopełnienie zbioru (obszaru) X.

Własności matematyczne erozji i dylatacji

rozdzielczość

$$X \ominus (B_1 \cup B_2) =$$

$$= (X \ominus B_1) \cap (X \ominus B_2)$$

$$X \oplus (B_1 \cup B_2) =$$

$$= (X \oplus B_1) \cup (X \oplus B_2)$$

superpozycja

$$(X \ominus B_1) \ominus B_2 =$$

$$= X \ominus (B_1 \oplus B_2)$$

$$(X \oplus B_1) \oplus B_2 =$$

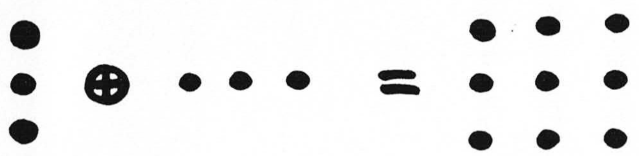
$$= X \oplus (B_1 \oplus B_2)$$

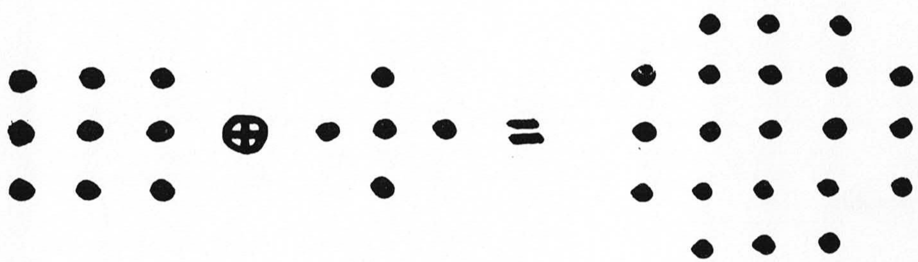
Złożone elementy strukturalne można tworzyć na drodze superpozycji elementów prostych

$$B = B_1 \oplus B_2 \cdots \oplus B_n$$

$$X \ominus B =$$
$$= (\cdots((X \ominus B_1) \ominus B_2) \cdots \ominus B_n)$$

$$X \oplus B =$$
$$= (\cdots((X \oplus B_1) \oplus B_2) \cdots \oplus B_n)$$





<u>Otwarcie i zamknięcie</u>

otwarcie = erozja + dylatacja

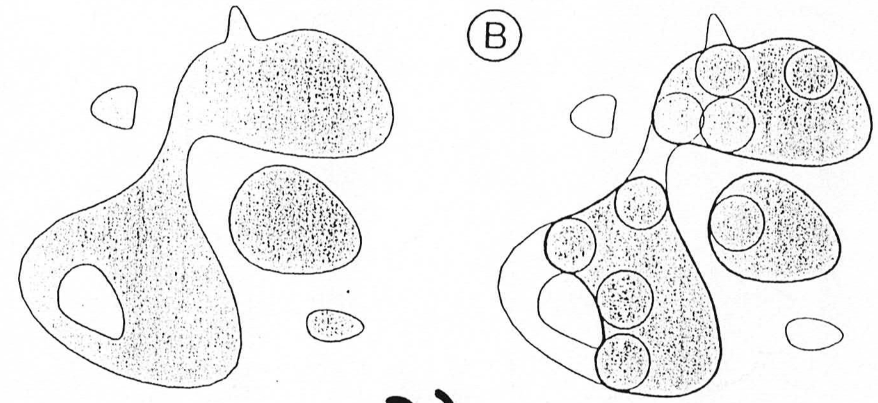
$$O_B(X) = X \circ B$$
$$= (X \ominus B) \oplus B$$

opening

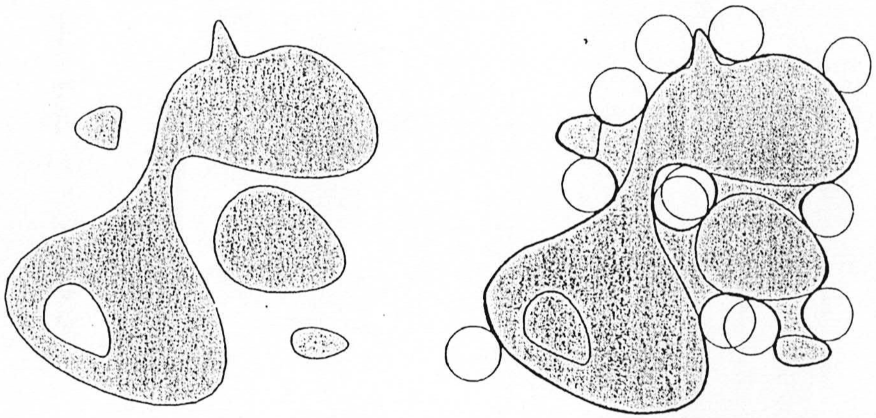
zamknięcie = dylatacja + erozja

$$C_B(X) = X \bullet B$$
$$= (X \oplus B) \ominus B$$

closing



a)



b)

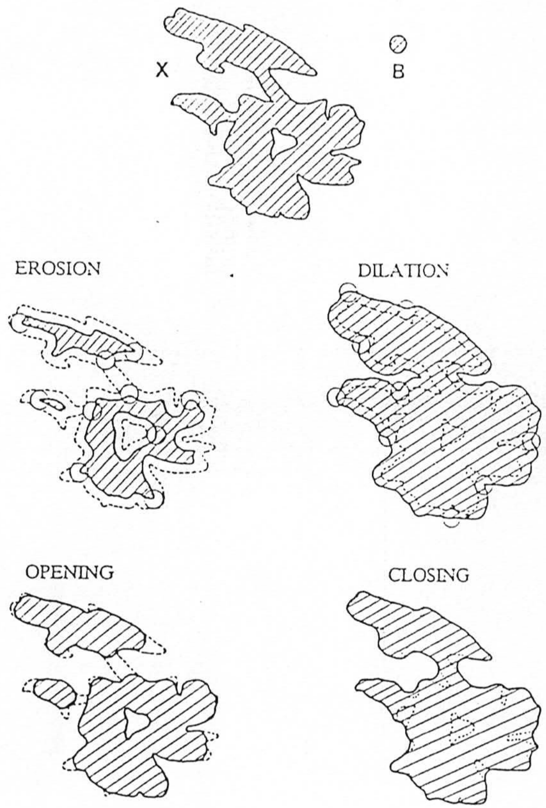
Otwarcie (a) oraz zamknięcie (b) figury za pomocą koła

właśności :

- otwarcie usuwa drobne szczegóły (wyspy , pół-wyspy) oraz „otwiera" niektóre jeziora tworząc z nich zatoki ; rozdziela obszary połączone wąskimi przesmykami

- zamknięcie wypełnia zatoki oraz małe jeziora ; skleja obszary położone blisko siebie

- oba przekształcenia nie zmieniają kształtu ani rozmiarów dużych obszarów o gładkim brzegu



$$E_B(X) \subset O_B(X) \subset X$$

$$X \subset C_B(X) \subset D_B(X)$$

Uwaga 1

Wielokrotne stosowanie operacji otwarcia bądź zamknięcia nie ma sensu gdyż

$$O_B(O_B(X)) = O_B(X)$$

$$C_B(C_B(X)) = C_B(X)$$

Uwaga 2

$$O_B(C_B(X)) \neq C_B(O_B(X))$$

Przekształcenie trafi – nie trafi

hit - miss

$$X \odot B = \{ (m,n) : B(m,n) \subset X \}$$

wykrywanie izolowanych punktów

0	0	0
0	$\boxed{1}$	0
0	0	0

wykrywanie narożników

x	1	0
1	$\boxed{1}$	0
0	0	0

wykrywanie punktów końcowych

x	x	x
0	1	0
0	0	0

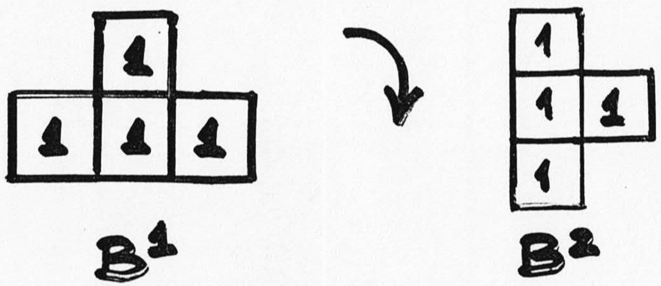
Aby wykryć elementy o dowolnej orientacji stosuje się rotację szablonu

$B^1 = B$

$B^2 = \text{rot}\{B^1\}$

$B^3 = \text{rot}\{B^2\}$

$B^4 = \text{rot}\{B^3\}$



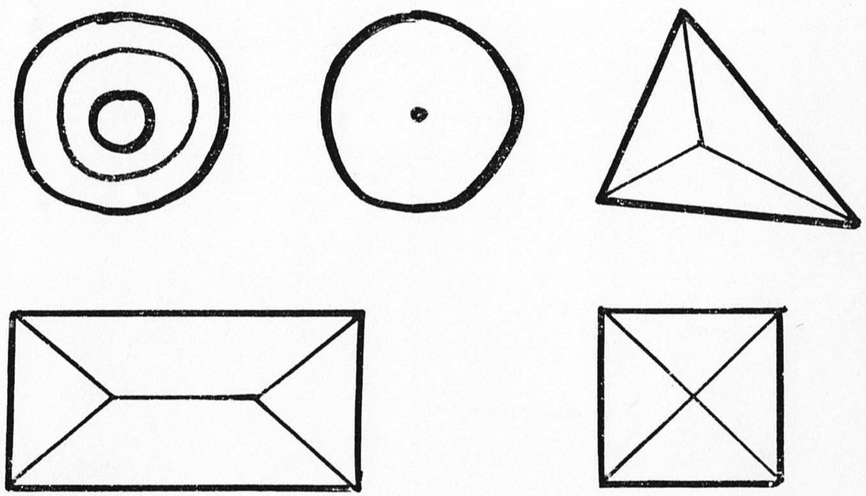
B^1 B^2

Szkieletyzacja

Skeleton

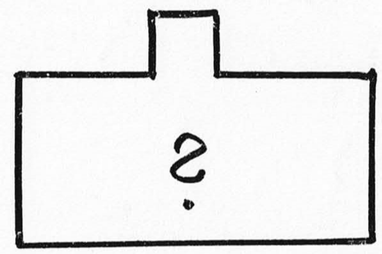
Szkielet figury - zbiór środków tzw. maksymalnych okręgów wpisanych w figurę

maksymalny okrąg wpisany w figurę - każdy okrąg, który styka się z brzegiem figury w co najmniej dwóch punktach lecz nie przecina tego brzegu



Uwaga

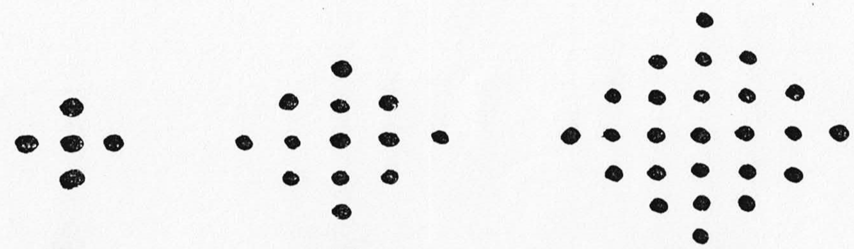
Na kształt szkieletu silny wpływ mają wszystkie nierównomierności brzegu badanej figury



Szkielet morfologiczny

morphological skeleton

$$nB \triangleq \underbrace{B \oplus B \oplus \cdots \oplus B}_{n}$$



B 2B 3B

$$S_B(X) =$$

$$= \bigcup_{n=0}^{N} [(X \ominus nB) - (X \ominus nB) \circ B]$$

$$= \bigcup_{n=0}^{N} s_n(X)$$

gdzie

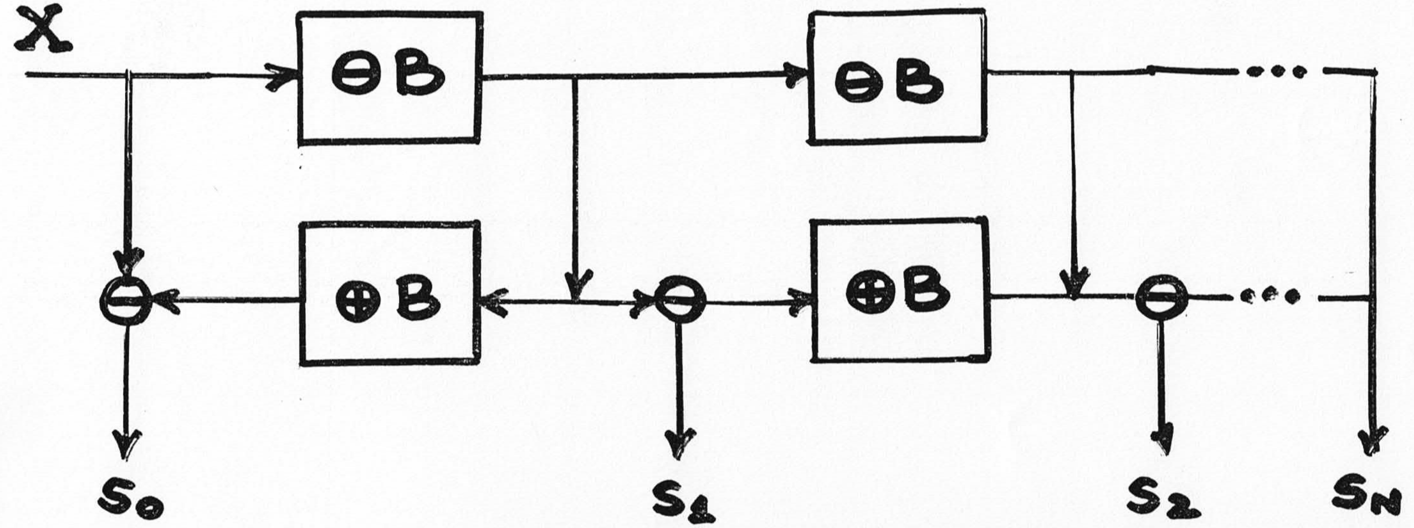
$$N = \max\{n : X \ominus nB \neq \emptyset\}$$

$$s_0(X) = X - [X \ominus B] \oplus B$$

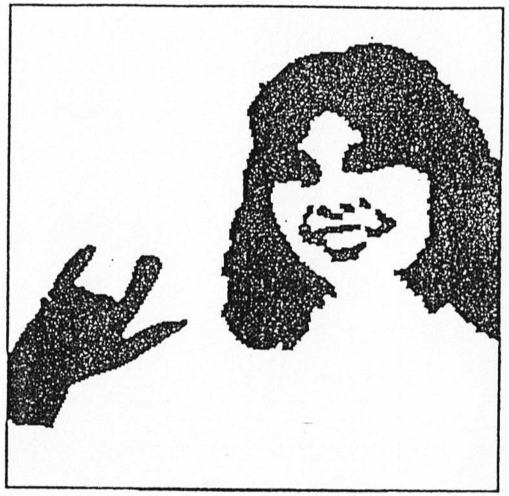
$$s_1(X) = (X \ominus B) + \\ -[(X \ominus B) \ominus B] \oplus B$$

$$\vdots$$

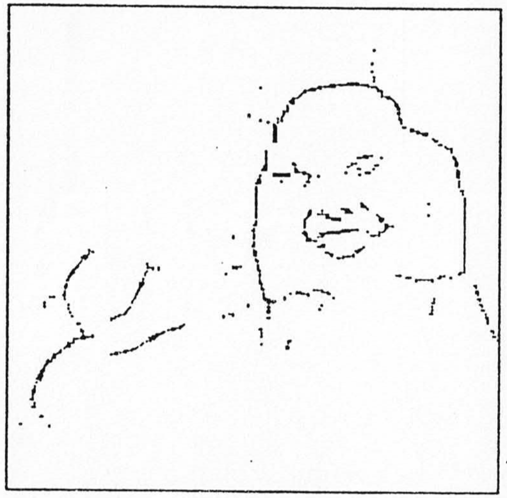
$$s_N(X) = (X \ominus NB) + \\ -[(X \ominus NB) \ominus B] \oplus B$$



Schemat blokowy algorytmu szkieletyzacji.



(a)



(b)

Obraz binarny (a) oraz jego szkielet (b)

Rekonstrukcja obrazu w oparciu o jego szkielet

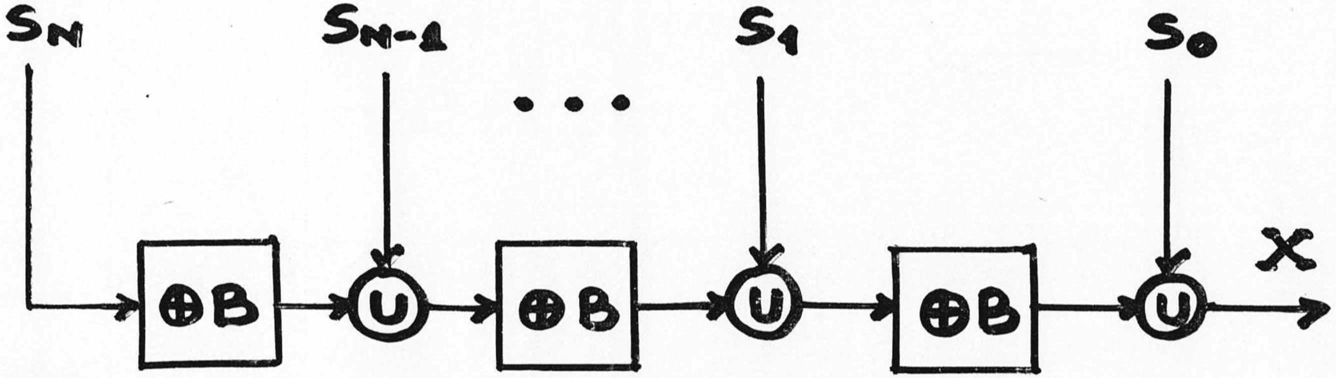
$$\bigcup_{n=k}^{N} S_n(X) \oplus nB = X \circ kB$$

a zatem

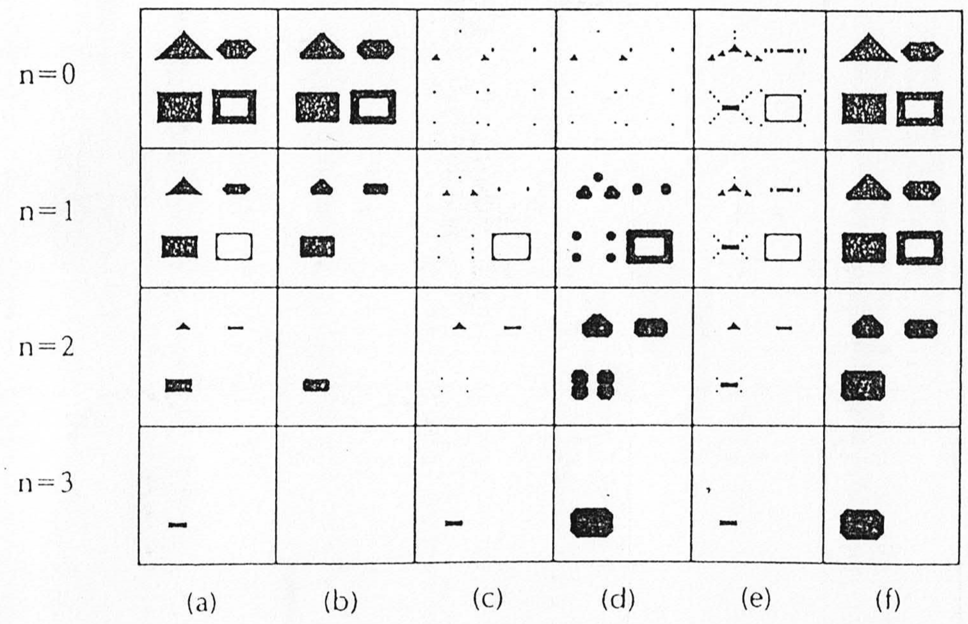
$$X = \bigcup_{n=0}^{N} S_n(X) \oplus nB$$

Dekompozycja szkieletowa wykorzystywana jest do kompresji obrazów

Minimalny podzbiór zbioru $S_B(X)$ gwarantujący bezbłędną rekonstrukcję nazywany jest szkieletem minimalnym.



Schemat blokowy algorytmu
rekonstrukcji szkieletowej



Kolejne fazy szkieletyzacji i rekonstrukcji obrazu

a) erozje $X \ominus nB$

b) otwarcia erozji $(X \ominus nB) \circ B$

c) podzbiory szkieletu $S_n(X)$

d) podzbiory szkieletu po dylatacji $S_n(X) \oplus nB$

e) cząstkowe sumy $\bigcup_{k=n}^{N} S_k(X)$

f) cząstkowe rekonstrukcje $\bigcup_{k=n}^{N} S_k(X) \oplus kB$

Inne podejście do szkieletyzacji

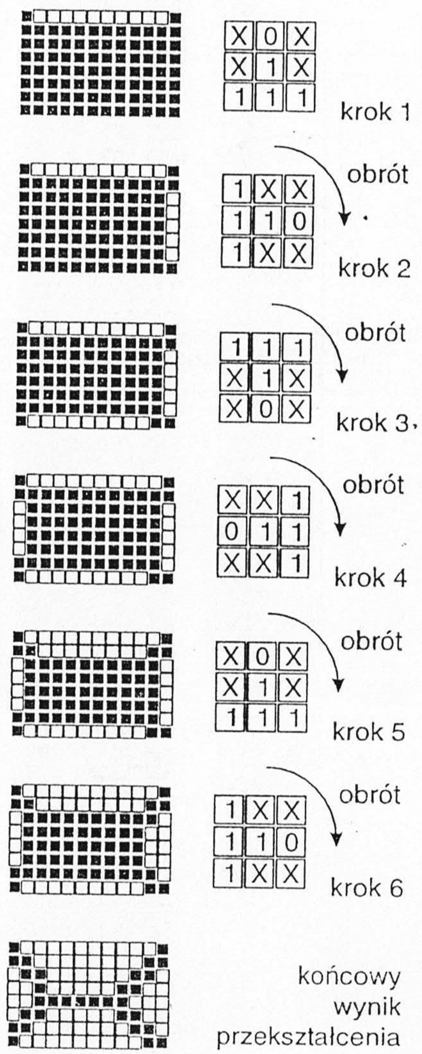
	0	
	$\boxed{1}$	
1	1	1

element strukturalny typu L

$$X \square L \triangleq X - X \circledcirc L$$

$$S_L(X) =$$

$$= ((\cdots(X \square L^1) \square L^2) \cdots \square L^N)$$



Szkieletyzacja przy użyciu wirującego elementu typu L

Przekształcenia morfologiczne dla obrazów wieloodcieniowych i kolorowych

Erozja i dylatacja funkcji $f(x)$ przy użyciu zbioru $B = [b_1, b_2]$, $b_1 < 0$, $b_2 \geq 0$

$$(f \ominus B)(x) =$$

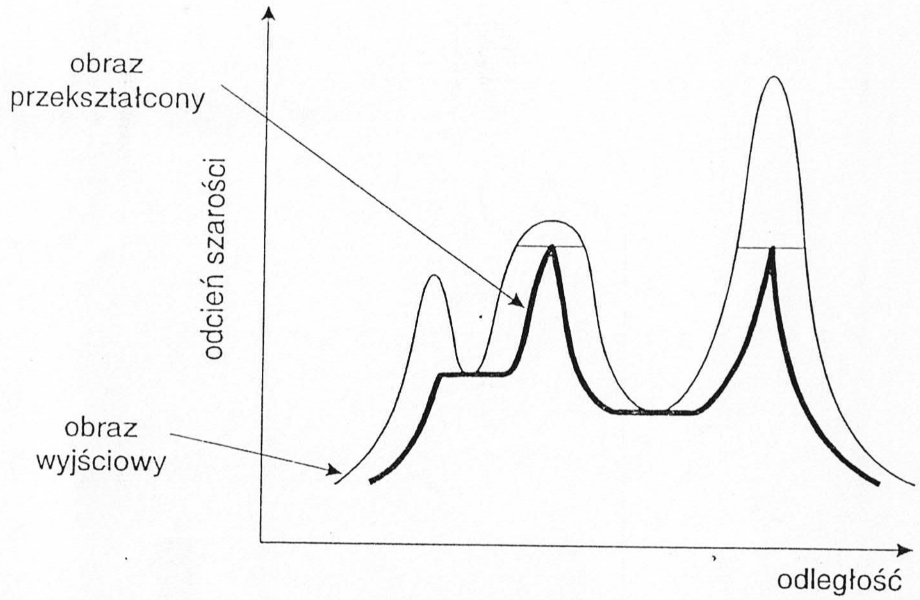
$$= \min_{b \in B} \{ f(x-b) \} \leq f(x)$$

filtr minimalny

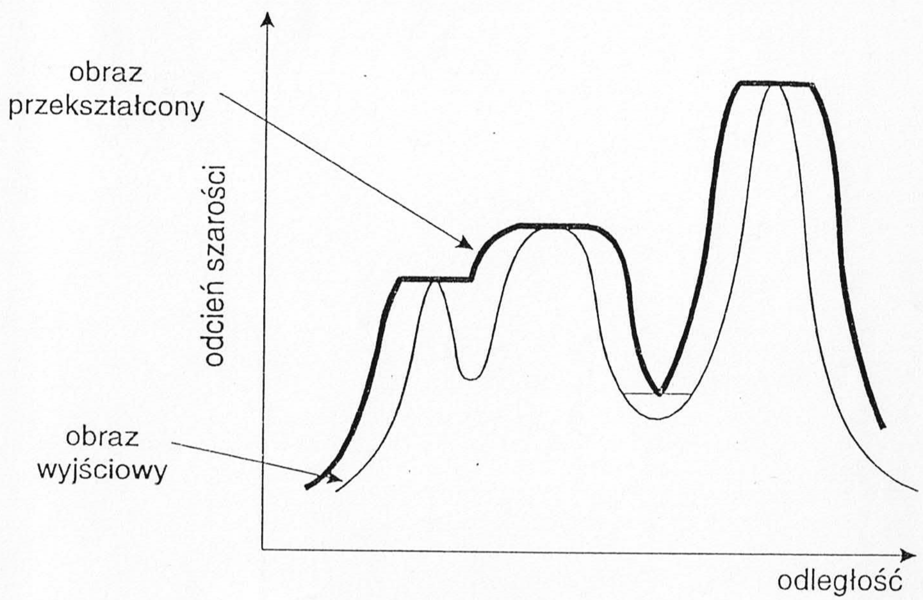
$$(f \oplus B)(x) =$$

$$= \max_{b \in B} \{ f(x+b) \} \geq f(x)$$

filtr maksymalny



erozja



dylatacja

Uwaga

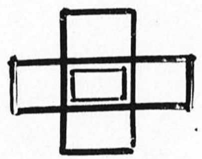
Złożoność obliczeniowa filtrów min/max

$$y(t) = \max\{x(t), x(t-1), \dots x(t-n+1)\}$$

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{gdy } x(t) \geq y(t-1) \\ y(t-1) & \text{gdy } x(t) < y(t-1) \text{ i } x(t-n) < y(t-1) \\ \max\{\cdot\} & \text{gdy } x(t) < y(t-1) \text{ i } x(t-n) = y(t-1) \end{cases}$$

Średnia liczba porównań przypadająca na jeden krok wynosi 3 i nie zależy od szerokości okna analizy n.

Erozja i dylatacja obrazów cyfrowych



B

$$(f \ominus B)(m,n) =$$
$$= \min \{ f(m-k, n-l), \; (k,l) \in B(m,n) \}$$

$$(f \oplus B)(m,n) =$$
$$= \max \{ f(m+k, n+l), \; (k,l) \in B(m,n) \}$$

Otwarcie i zamknięcie funkcji $f(x)$ przy użyciu zbioru $B = [b_1, b_2]$, $b_1 < 0$, $b_2 \geq 0$

$$(f \circ B)(x) =$$
$$= ((f \ominus B) \oplus B)(x) \leq f(x)$$

$$(f \bullet B)(x) =$$
$$= ((f \oplus B) \ominus B)(x) \geq f(x)$$

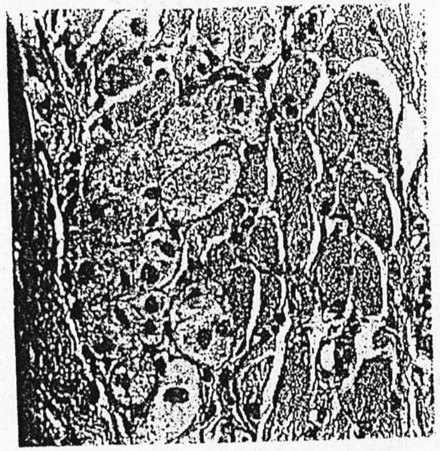
$$(f \ominus B)(x) \leq (f \circ B)(x)$$
$$(f \bullet B)(x) \leq (f \oplus B)(x)$$

Otwarcie i zamknięcie obrazów wieloodcieniowych ma podobne własności jak analogiczne operacje zdefiniowane dla obrazów binarnych

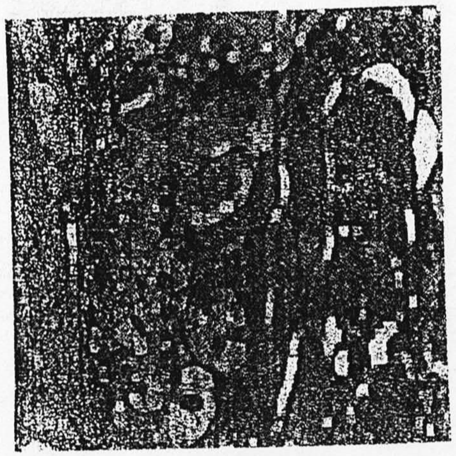
Podstawowa różnica – oba przekształcenia powodują pewne rozmycie szczegółów obrazu :

jasnych – w przypadku zamknięcia

ciemnych – w przypadku otwarcia



a)



b)

c)

Oryginalny obraz (a) oraz wynik jego otwarcia (b) i zamknięcia (c)

Detekcja krawędzi

$$\partial^- X = X - X \ominus B$$

$$\partial^+ X = X \oplus B - X$$

gradient morfologiczny Beuchera

$$\partial^- X + \partial^+ X =$$

$$= X \oplus B - X \ominus B$$

Inne metody wykrywania krawędzi

$$\min \{ \partial^- X , \partial^+ X \}$$

$$\max \{ \partial^- X , \partial^+ X \}$$

nieliniowy operator Laplace'a

$$\partial^+ X - \partial^- X$$

Uwaga

w przypadku obrazów wieloodcieniowych zarówno gradient erozyjny ∂^- jak dylatacyjny ∂^+ może być wyznaczony metodą dekompozycji binarnej

Detekcja szczytów i dolin

top-hat transformations

wykrywanie miejsc lokalnie najjaśniejszych

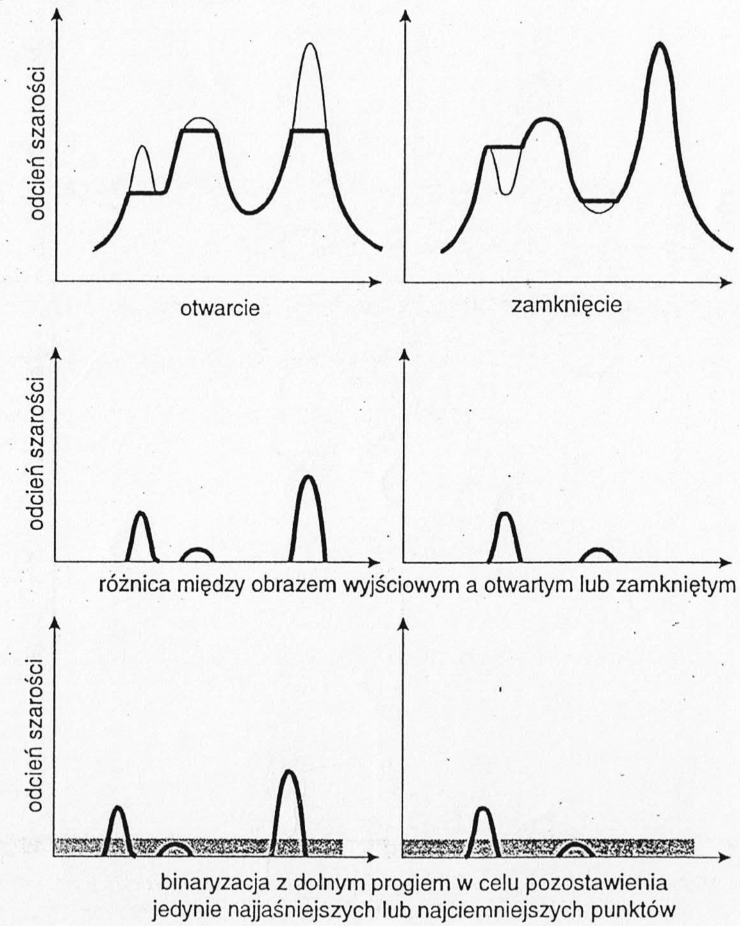
$$f(x) - (f \circ B)(x)$$

+ binaryzacja

wykrywanie miejsc lokalnie najciemniejszych

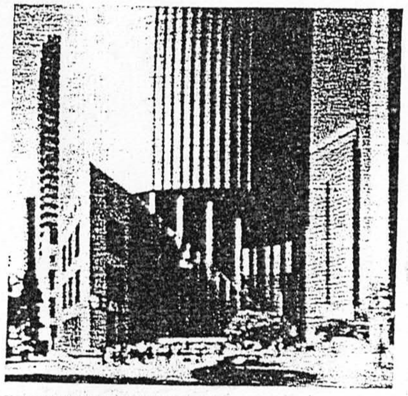
$$(f \bullet B)(x) - f(x)$$

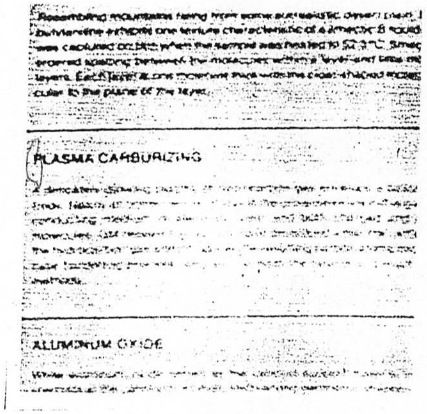
+ binaryzacja



Wykrywanie szczytów (po lewej) i dolin (po prawej)

Rozmycie obrazu





PLASMA CARBURIZING

ALUMINUM OXIDE

Źródła :

- ograniczona rozdzielczość układu optycznego lub jego niewłaściwa kalibracja
- wpływ ośrodka, przez który przechodzą promienie świetlne np. atmosfery ziemskiej (zdjęcia astronomiczne i satelitarne) lub cieczy (zdjęcia mikroskopowe)
- ruch obiektu i/lub kamery podczas wykonywania zdjęcia

$$g(x,y) = o(x,y) ** h(x,y)$$

$$= \int\int_{-\infty}^{\infty} o(x,y) *$$

$$* h(x-\delta_1, y-\delta_2) d\delta_1 d\delta_2$$

gdzie

$$h(x,y) \geq 0$$

oznacza odpowiedź impulsową układu optycznego charakteryzującą stopień rozmywania obrazu

PSF - point spread function

Przykłady funkcji PSF

$$h(x,y) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

funkcja dobrze opisująca efekty atmosferyczne przy badaniu gwiazd

$$h(x,y) = b(x)\cdot\delta(y)$$

gdzie

$$b(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x_0} & \text{gdy } |x| \leq x_0 \\ 0 & \text{gdy } |x| > x_0 \end{cases}$$

zaś $\delta(\cdot)$ oznacza funkcję delta Diraca

Usuwanie nieostrości obrazu

$$g(m,n) =$$

$$= f(m,n) ** h(m,n) +$$

$$+ z(m,n)$$

gdzie $h(m,n)$ oznacza odpowiedź impulsową układu optycznego zaś $z(m,n)$ - addytywny proces zakłócający

$$g(m,n) \xmapsto{?} f(m,n)$$

Jest to tzw. problem rozplotu

deconvolution

Metoda filtru odwrotnego

$$G(p,q) = F(p,q) \cdot H(p,q) + Z(p,q)$$

gdzie

$$X(p,q) = \mathcal{F}\left[x(m,n)\right]$$

Jeśli pominiemy obecność procesu zakłócającego możemy posłużyć się oszacowaniem

$$\hat{F}(p,q) = \frac{G(p,q)}{H(p,q)}$$

$$\hat{f}(m,n) = \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{F}(p,q)\right]$$

Wada

Ponieważ

$$\hat{F}(p,q) = F(p,q) + \frac{Z(p,q)}{H(p,q)}$$

szum jest silnie wzmacniany w punktach, w których $H(p,q) \cong 0$

Filtr pseudoodwrotny

$$H^{-}(p,q) = \begin{cases} \dfrac{1}{H(p,q)} & \text{gdy } |H(p,q)| > \varepsilon \\ 0 & \text{gdy } |H(p,q)| \le \varepsilon \end{cases}$$

Zastosowanie filtracji odwrotnej i pseudoodwrotnej

Rozplot przy użyciu metody iteracyjnej

w dziedzinie częstotliwości

$$\hat{F}_{i+1}(p,q) = \hat{F}_i(p,q) + \mu\left[G(p,q) - \hat{F}_i(p,q) * H(p,q)\right]$$

gdzie $\mu > 0$ oznacza współczynnik adaptacji który (w celu zagwarantowania zbieżności procedury) powinien spełniać ograniczenie

$$|1 - \mu H(p,q)| < 1 \quad \forall_{p,q}$$

oszacowanie początkowe

$$\hat{F}_0(p,q) = \mu G(p,q)$$

Rozplot przy użyciu metody iteracyjnej

<u>w dziedzinie częstotliwości</u>

$$\hat{F}_{i+1}(p,q) = \hat{F}_i(p,q) + \mu\left[G(p,q) - \hat{F}_i(p,q) * H(p,q)\right]$$

gdzie $\mu > 0$ oznacza współczynnik adaptacji który (w celu zagwarantowania zbieżności procedury) powinien spełniać ograniczenie

$$|1 - \mu H(p,q)| < 1 \quad \forall_{p,q}$$

oszacowanie początkowe

$$\hat{F}_0(p,q) = \mu G(p,q)$$

<u>Analiza zbieżności algorytmu iteracyjnego</u>

$$\hat{F}_0(p,q) = \mu G(p,q)$$

$$\hat{F}_1(p,q) = \hat{F}_0(p,q) + \mu\left[G(p,q) - \hat{F}_0(p,q)H(p,q)\right] = \mu G(p,q)\left[1 + (1 - \mu H(p,q))\right]$$

$$\vdots$$

$$\hat{F}_i(p,q) = \mu G(p,q) \cdot \left[1 + (1 - \mu H(p,q)) + \dots + (1 - \mu H(p,q))^i\right] =$$

$$= \mu G(p,q) \cdot \frac{\left[1-(1-\mu H(p,q))^{i+1}\right]}{1-(1-\mu H(p,q))}$$

$$= \frac{G(p,q)}{H(p,q)}\left[1-(1-\mu H(p,q))^{i+1}\right]$$

tj. zbieżność ma miejsce w przypadku gdy

$$|1-\mu H(p,q)| < 1 \quad \forall_{p,q}$$

<u>W dziedzinie czasu</u>

$$\hat{f}_{i+1}(m,n) = \hat{f}_i(m,n) + \mu\left[g(m,n) - \hat{f}_i(m,n) ** h(m,n)\right]$$

$$\hat{f}_0(m,n) = \mu g(m,n)$$

<u>Metoda filtracji Wienera</u>

$$g(m,n) = f(m,n) + z(m,n)$$

Załóżmy, że sygnały $\{f(m,n)\}$ i $\{z(m,n)\}$ są stacjonarne, wzajemnie nieskorelowane i mają zerowe wartości oczekiwane

$$E[f(m,n)f(m-k,n-k)] = R_f(k,l)$$