13. Wybrane algorytmy cyfrowego przetwarzania sygnałów

- Dyskretna transformata Fouriera – algorytm ***FFT*** (*ang. fast Fourier transform*)
- Wykrywanie tonów DTMF (ang. Dual Tone Multi Frequency)
- Filtracja cyfrowa
- Efekty akustyczne

Bibliografia:

- Chassaing Rulph, Donald Reay, *Digital Signal Processing and Applications with the C6713 and C6416 DSK*, Wiley-Interscience 2008.
- Sophocles J. Orfanidis, *Introduction to Signal Processing*, Copyright © 2010 by Sophocles J. Orfanidis,
- DTMF Tone Generation and Detection An Implementation Using the TMS320C54x, Texas Instruments, Application Report, SPRA096A - May 2000

13.1. Dyskretna transformata Fouriera – algorytm FFT

Transformata Fouriera ma szerokie zastosowanie w analizie i syntezie układów i systemów elektronicznych, gdyż pozwala na połączenie dwóch sposobów przedstawiania sygnałów — reprezentacji w dziedzinie czasu i reprezentacji w dziedzinie częstotliwości.
Dyskretna transformata Fouriera (*ang. discrete fourier transform* - ***DFT***) stosowana jest wtedy, gdy wartości liczbowe sygnału $x(t)$ są określone dla skończonej liczby N wartości zmiennej t (czas) należącej do pewnego przedziału $[0, T]$. Najczęściej przyjmuje się, że wartości te są równoodległe o jednakowy przedział czasu $\Delta t = T / N = 1 / f_p$, gdzie f_p jest częstotliwością próbkowania. Sygał $x(t)$ jest zatem reprezentowany przez skończony ciąg $\{x(n)\}$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, wartości liczbowych — próbek sygnału.
Zadanie obliczenia dyskretnej transformacji Fouriera sygnału sprowadza się do wyznaczenia wartości liczbowych sum

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1, \qquad (13.1.a)$$

dla przekształcenia prostego (czas — częstotliwość) oraz sum

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1, \qquad (13.1.b)$$

dla przekształcenia odwrotnego IDFT (*ang. inverse* ***DFT***) - częstotliwość — czas, gdzie

$$W_N^m = e^{-j2\pi m/N} \qquad (13.1.c)$$

to współczynnik obrotu (cosinus zespolony, zespolona funkcja wykładnicza).

13.1. Dyskretna transformata Fouriera – algorytm FFT

Wyznaczenie DFT w oparciu o zależność $(13.1.\mathrm{a})$ (oraz IDFT z wykorzystaniem $(13.1.\mathrm{b})$ wymaga wykonania N^2 mnożeń oraz N dodawań. Stosując algorytm szybkiej transformacji Fouriera FFT (odwrotnej szybkiej transformacji Fouriera) liczbę obliczeń można zmniejszyć do ok. $N/2\cdot\log_2 N$.

<u>Algorytm FFT o podstawie 2</u> (długość sekwencji wejściowej jest potęgą **2**)

1. Podział przetwarzanej sekwencji $\{x(n)\}=\{x(0),x(1),\ldots,x(N-1)\}$ na dwie połowy:

$$\left\{x(0),x(1),\ldots,x\left(\frac{N}{2}-1\right)\right\} \quad \text{oraz} \quad \left\{x\left(\frac{N}{2}\right),x\left(\frac{N}{2}+1\right),\ldots,x(N-1)\right\}.$$

Transformatę DFT całej sekwencji z uwzględnieniem transformat obydwu części można zapisać odpowiednio

$$X(k)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n)W_N^{nk}+\sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \qquad (13.1.\mathrm{d})$$

Podstawiając $n=n+N/2$ w drugiej sumie powyższego wzoru otrzymuje się

$$X(k)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n)W_N^{nk}+W_N^{kN/2}\sum_{n=0}^{(N/2)-1} x\left(n+\frac{N}{2}\right)W_N^{nk} \qquad (13.1.\mathrm{e})$$

13.1. Dyskretna transformata Fouriera – algorytm FFT

Wykorzystując własność wyrażenia $(13.1.\mathrm{c})$

$$W_N^{kN/2} = e^{-jk\pi} = (e^{-j\pi})^k = (\cos\pi - j\sin\pi)^k = (-1)^k$$

zależność $(13.1.\mathrm{e})$ przyjmuje postać

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[x(n) + (-1)^k x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{nk}. \qquad (13.1.\mathrm{f})$$

Z kolei wyrażenie $(-1)^k = 1$ dla k parzystego i (-1) dla k nieparzystego. Pozwala to zapisać równanie $(13.1.\mathrm{f})$ oddzielnie dla k parzystego

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{nk}. \qquad (13.1.\mathrm{g})$$

k nieparzystego.

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{nk}. \qquad (13.1.\mathrm{h})$$

13.1. Dyskretna transformata Fouriera – algorytm FFT

Zastępując $k=2k$ dla parzystych k oraz $k=2k+1$ dla nieparzystych k równania $(13.1.\mathrm{g})$ oraz $(13.1.\mathrm{h})$ dla $k=0,1,\ldots,(N/2)-1$ przyjmują odpowiednio postać

$$X(2\mathrm{k})=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}\left[x(n)+x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right]W_N^{2\mathrm{nk}}, \qquad (13.1.\mathrm{i})$$

$$X(2\mathrm{k}+1)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}\left[x(n)-x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right]W_N^{n}\,W_N^{2\mathrm{nk}}. \qquad (13.1.\mathrm{j})$$

Wykorzystując własność współczynnika obrotu $(13.1.\mathrm{c})$

$$W_N^{2\mathrm{m}}=W_{N/2}^{m}, \qquad (13.1.\mathrm{k})$$

oraz stosując podstawienia

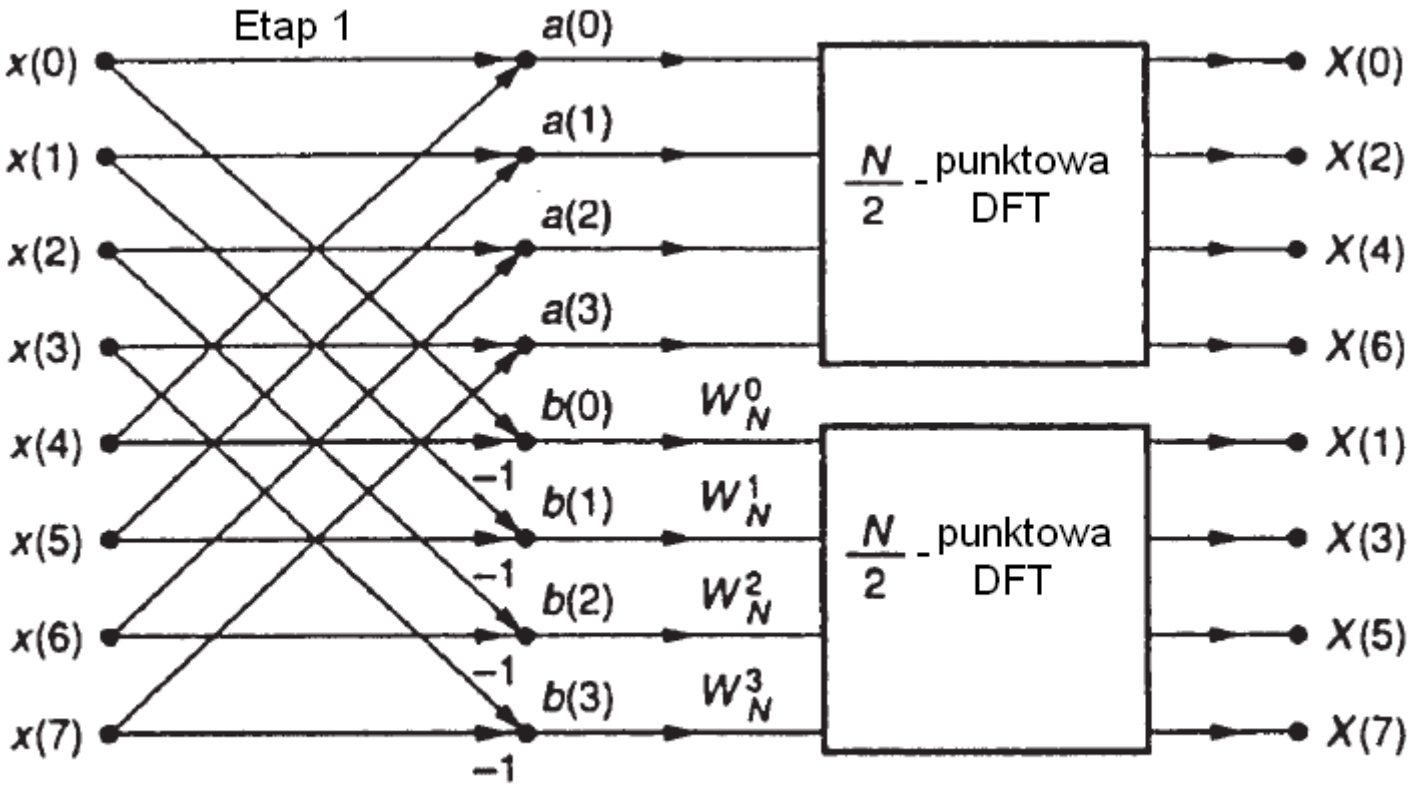
$$a(n)=x(n)+x\left(n+\frac{N}{2}\right), \qquad b(n)=x(n)-x\left(n+\frac{N}{2}\right),$$

13.1. Dyskretna transformata Fouriera – algorytm FFT

Wyrażenia $(13.1.\mathrm{i})$ oraz $(13.1.\mathrm{j})$ przyjmują bardziej czytelną postać dwóch $(N/2)$-punktowych transformat DFT

$$X(2\mathrm{k}) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} a(n) W_{N/2}^{nk}, \qquad (13.1.\mathrm{l})$$

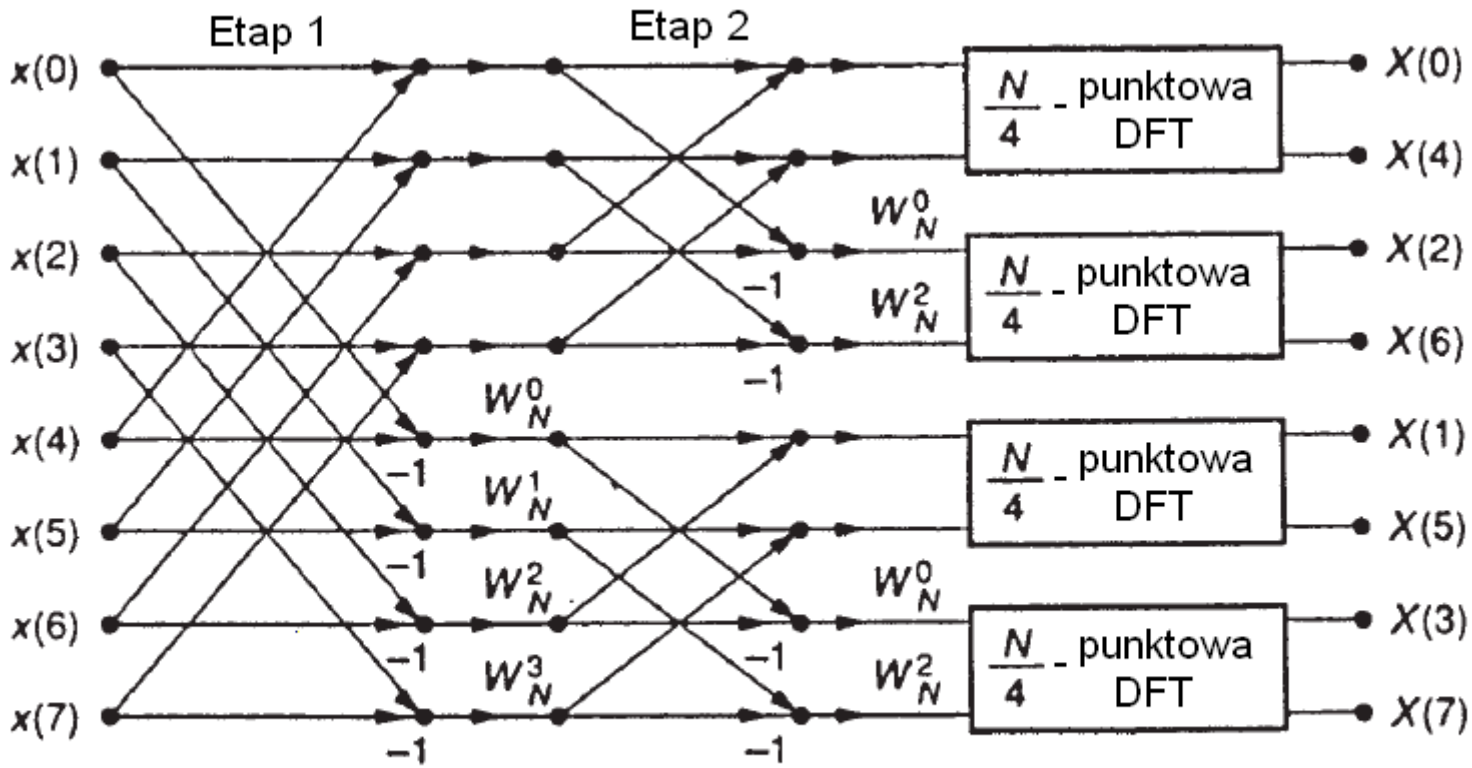
$$X(2\mathrm{k}+1) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} b(n) W_N^n W_{N/2}^{nk}. \qquad (13.1.\mathrm{m})$$



Rys.13.1.1. Rozkład N punktowej DFT na dwie (N/2) punktowe DFT dla N=8.

13.1. Dyskretna transformata Fouriera – algorytm FFT

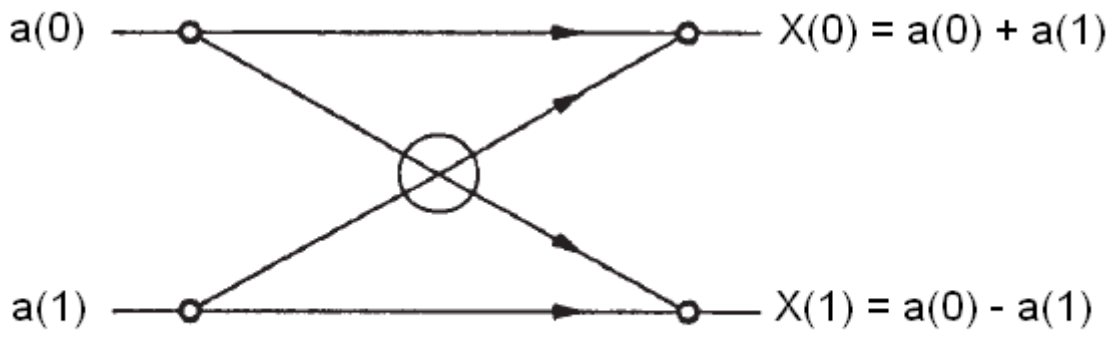
2. Podział uzyskanych dwóch sekwencji $\{a(0), a(1), \ldots, a(N/2-1)\}$ oraz $\{b(0)W_N^0, b(1)W_N^1, \ldots, b(N/2-1)W_N^{N/2-1}\}$ na cztery sekwencje $(N/4)$ punktowe. Wyznaczenie transformat DFT dla poszczególnych sekwencji w sposób analogiczny do czynności w punkcie nr 1.



Rys. 13.1.2. Rozkład dwóch (N/2) punktowych DFT na cztery (N/4) punktowe DFT dla N=8.

13.1. Dyskretna transformata Fouriera – algorytm FFT

3. Przeprowadzanie dekompozycji DFT do momentu uzyskanych $(N/2)$ sekwencji dwuelementowych tzw. "motylków".



Rys. 13.1.3. Dwupunktowy "motylek" FFT.

W przypadku 2-punktowego DFT równanie przyjmuje postać

$$X(k)=\sum_{n=0}^{1} x(n) W_2^{nk} \qquad k=0,1\,, \tag{13.1.n}$$

lub

$$X(0)=a(0)W_2^0+a(1)W_2^0=a(0)+a(1)$$

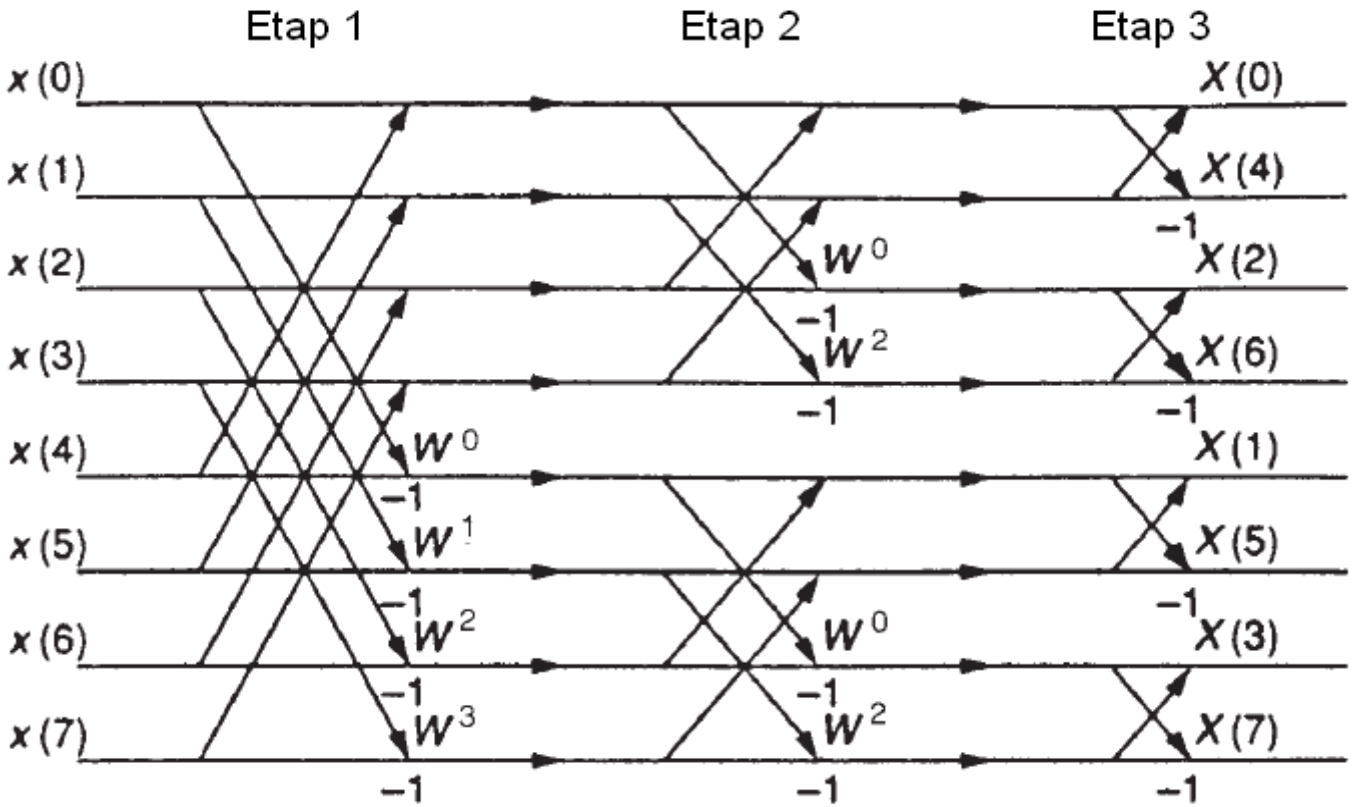
$$X(1)=a(0)W_2^0+a(1)W_2^1=a(0)-a(1) \tag{13.1.o}$$

W drugim równaniu $(13.1.0)$ wykorzystano własność współczynnika obrotu

$$W_2^1=e^{-j\,2\pi/2}=-1 \tag{13.1.c}$$

13.1. Dyskretna transformata Fouriera – algorytm FFT

Omówiona metoda dekompozycji DFT nosi nazwę algorytmu **FFT o podstawie 2 z podziałem w dziedzinie częstotliwości DIF** (ang. decimation in frequency).



Rys. 13.1.4. Graf 8 punktowego FFT z podziałem w dziedzinie częstotliwości.

13.1. Dyskretna transformata Fouriera – algorytm FFT

Jak można zauważyć w fazie końcowej algorytm ten wymaga posortowania uzyskanych wartości widma. Można do tego wykorzystać ***metodę numeracji o odwróconej kolejności bitów*** (*ang. bit-reversal procedure*)

$0 \ (000)_2 \rightarrow (000)_2 \ 0$

$1 \ (001)_2 \rightarrow (100)_2 \ 4$

$2 \ (010)_2 \rightarrow (010)_2 \ 2$

$3 \ (011)_2 \rightarrow (110)_2 \ 6$

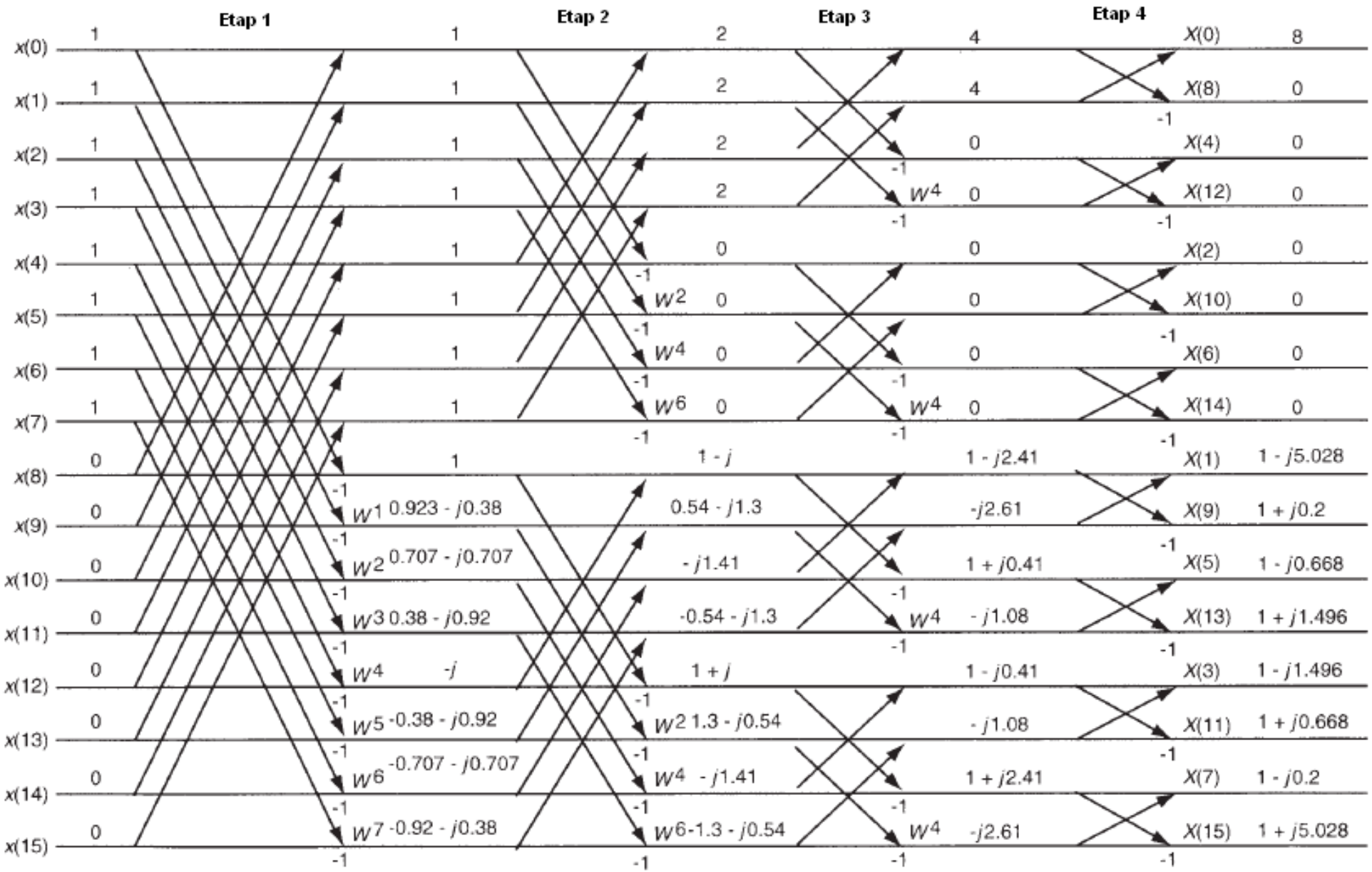
$4 \ (100)_2 \rightarrow (001)_2 \ 1$

$5 \ (101)_2 \rightarrow (101)_2 \ 5$

$6 \ (110)_2 \rightarrow (011)_2 \ 1$

$7 \ (111)_2 \rightarrow (111)_2 \ 7$

13.1. Dyskretna transformata Fouriera – algorytm FFT



Rys 13.1.5 Graf 16 punktowego FFT o podstawie 2 z podziałem w dziedzinie częstotliwości.

13.1. Dyskretna transformata Fouriera – algorytm FFT

Istnieje również metoda dekompozycji DFT **z podziałem w dziedzinie czasu DIT** (ang. decimation in time). Powstaje ona w wyniku rozkładu algorytmu spowodowanego podziałami danych wejściowych na ciagi danych parzystych i nieparzystych.

$$x(0), x(2), x(4), \ldots, x(2n) \qquad x(1), x(3), x(5), \ldots, x(2n+1)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n) W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n+1) W_N^{(2n+1)k}$$

$$W_N^{2nk} = W_{N/2}^{nk}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n) W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n+1) W_{N/2}^{nk}$$

$$C(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n) W_{N/2}^{nk}$$

$$X(k) = C(k) + W_N^k D(k)$$

$$D(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} X(2n+1) W_{N/2}^{nk}$$

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

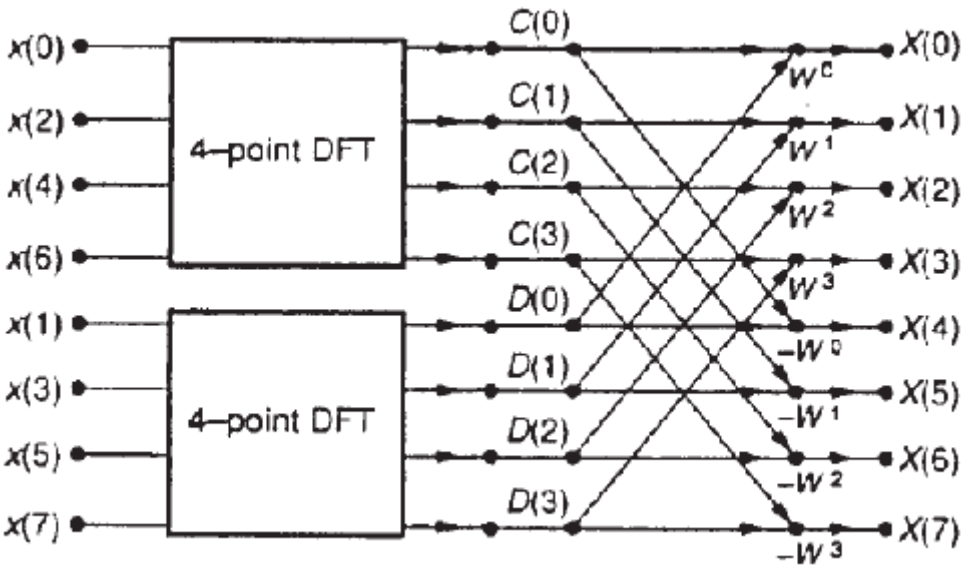
$$X(k+N/2) = C(k) - W_N^k D(k), \qquad k = 0, 1, \ldots, (N/2)-1$$

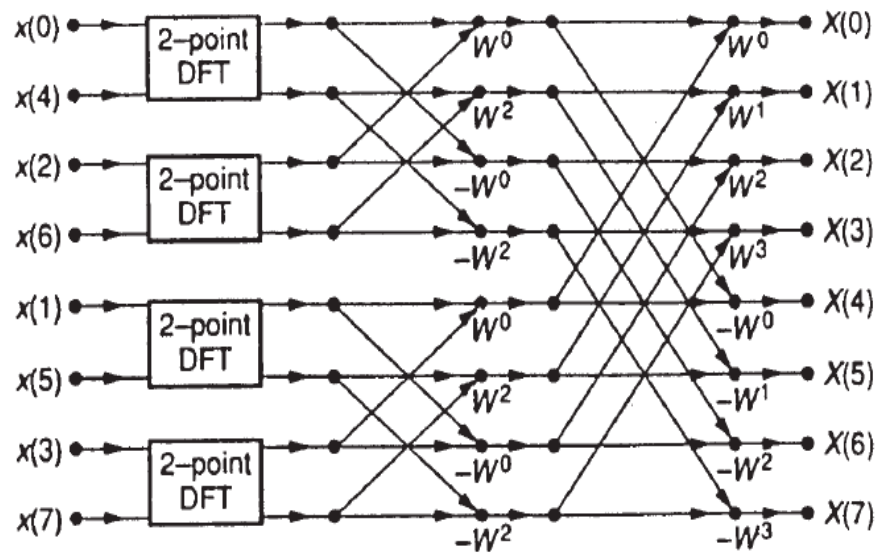
13.1. Dyskretna transformata Fouriera – algorytm FFT

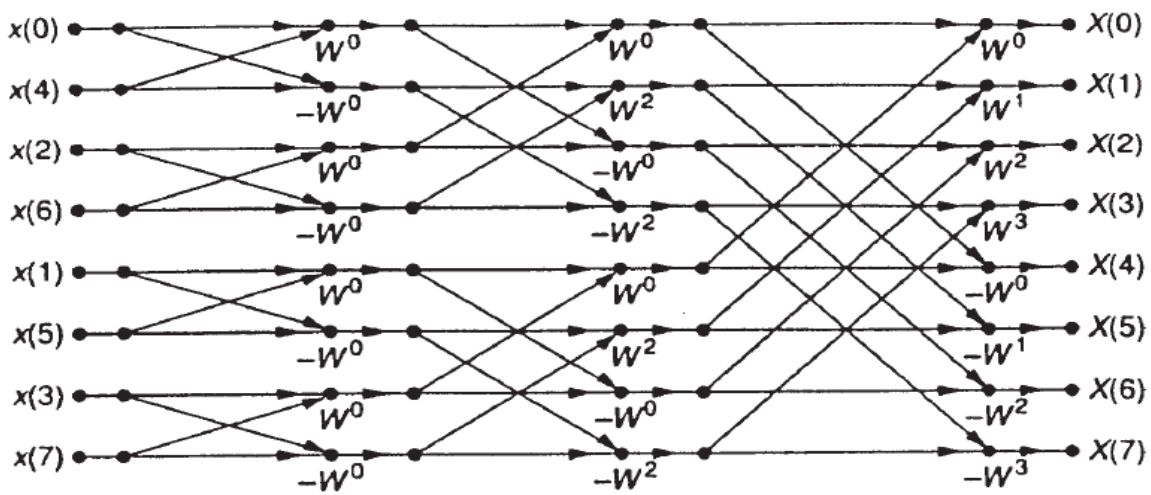
FFT o podstawie 2 z podziałem w dziedzinie czasu DIT.

Dla $N=8$

$$X(k)=C(k)+W_8^k D(k), \qquad k=0,1,2,3,$$
$$X(k+4)=C(k)-W_8^k D(k), \qquad k=0,1,2,3.$$







13.1. Dyskretna transformata Fouriera – algorytm FFT

W celu poprawy szybkości działania algorytmu stosuje się **FFT o podstawie 4 (z podziałem w dziedzinie częstotliwości DIF).**

$$X(k)=\sum_{n=0}^{(N/4)-1} x(n)W^{nk}+\sum_{n=N/4}^{(N/2)-1} x(n)W^{nk}+\sum_{n=N/2}^{(3N/4)-1} x(n)W^{nk}+\sum_{n=3N/4}^{N-1} x(n)W^{nk}$$

Przyjmując, że w drugiej, trzeciej i czwartej sumie odpowiednio:
$n=n+N/4$, $n=n+N/2$ oraz $n=n+3\mathrm{N}/4$ otrzymuje się:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{(N/4)-1} x(n)W^{nk}+W^{kN/4}\sum_{n=0}^{(N/4)-1} x(n+N/4)W^{nk}$$
$$+W^{kN/2}\sum_{n=0}^{(N/4)-1} x(n+N/2)W^{nk}+W^{3kN/4}\sum_{n=0}^{(N/4)-1} x(n+3N/4)W^{nk}$$

gdzie:

$$W^{kN/4}=\left(e^{-j2\pi/N}\right)^{kN/4}=e^{-jk\pi/2}=(-j)^k$$
$$W^{kN/2}=e^{-jk\pi}=(-1)^k$$
$$W^{3kN/4}=(j)^k$$

13.1. Dyskretna transformata Fouriera – algorytm FFT

FFT o podstawie 4 z podziałem w dziedzinie częstotliwości DIF (cd.)

Przyjmując, że $W_N^4 = W_{N/4}$ dla $k = 0, 1, \ldots, (N/4) - 1$ otrzymuje się:

$$X(4k) = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} [x(n) + x(n+N/4) + x(n+N/2) + x(n+3N/4)] W_{N/4}^{nk}$$

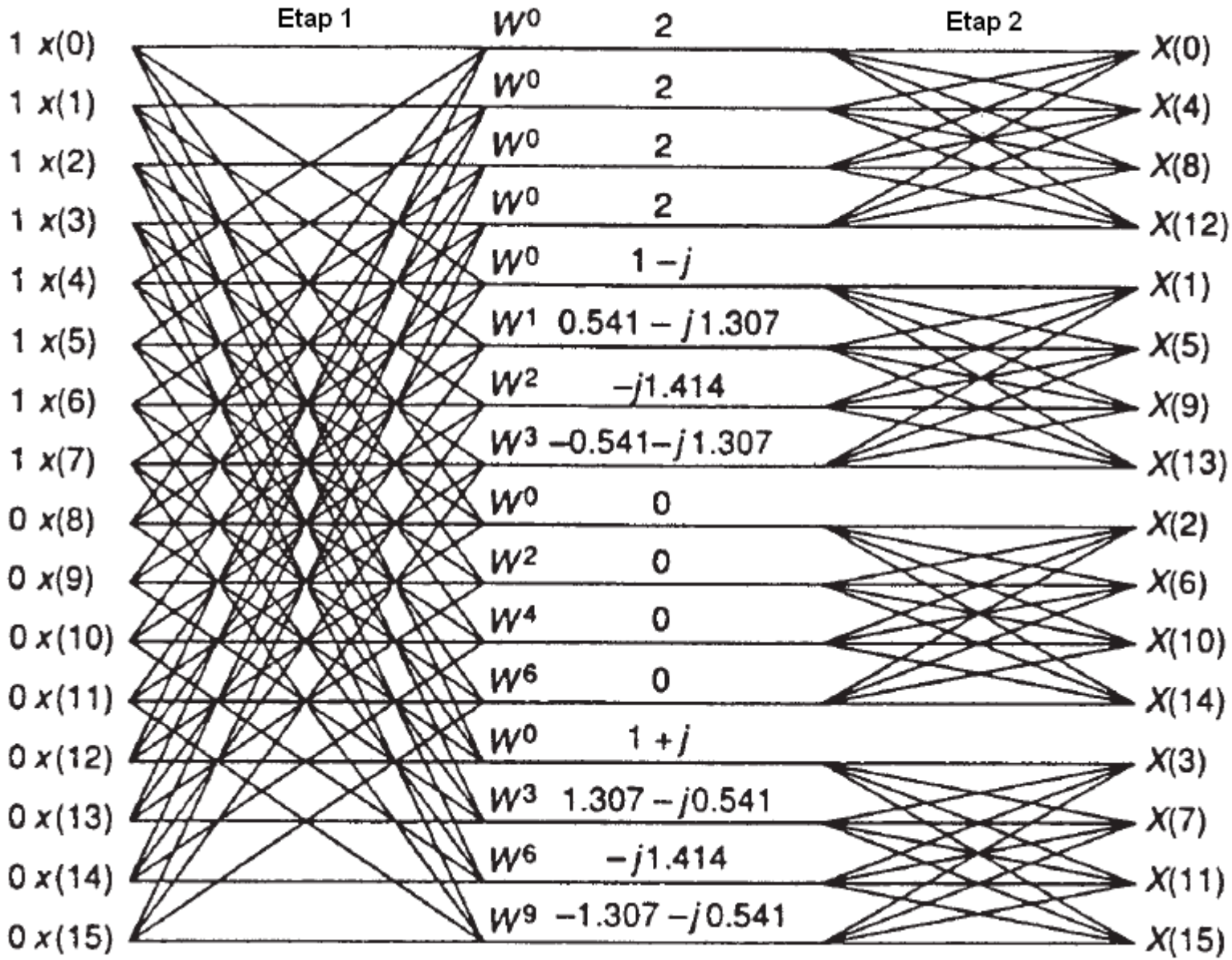
$$X(4k+1) = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} [x(n) - jx(n+N/4) - x(n+N/2) + jx(n+3N/4)] W_N^n W_{N/4}^{nk}$$

$$X(4k+2) = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} [x(n) - x(n+N/4) + x(n+N/2) - x(n+3N/4)] W_N^{2n} W_{N/4}^{nk}$$

$$X(4k+3) = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} [x(n) + jx(n+N/4) - x(n+N/2) - jx(n+3N/4)] W_N^{3n} W_{N/4}^{nk}$$

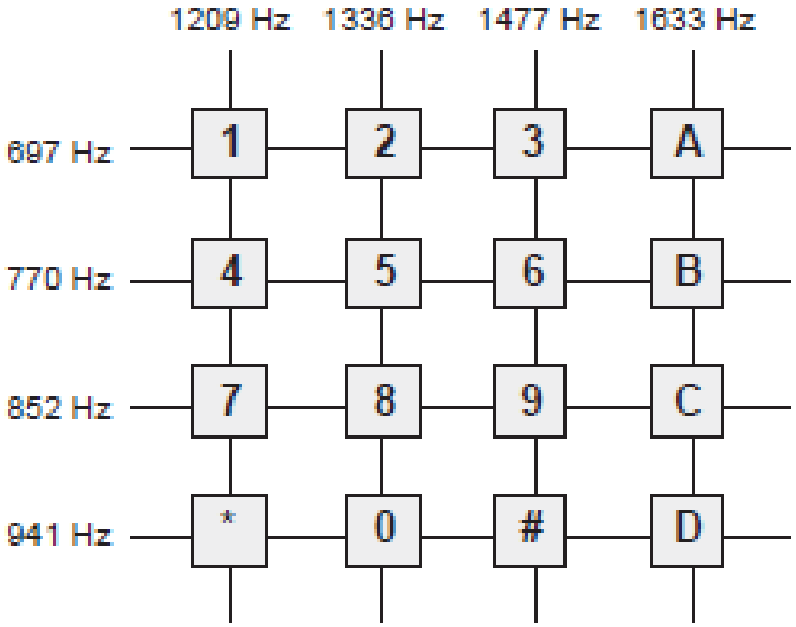
13.1. Dyskretna transformata Fouriera – algorytm FFT

FFT o podstawie 4 z podziałem w dziedzinie częstotliwości DIF (cd.)
16 punktowa FFT



13.2. Wykrywanie tonów DTMF

Tony DTMF (ang. Dual Tone Multi Frequency) stosowane są w telefonach z wybieraniem tonowym. Wciśnięcie dowolnego znaku na klawiaturze (najczęściej cyfry) jest sygnalizowane za pomocą dwóch sygnałów sinusoidalnych.



Własności tonów DTMF

a) Projektowanie tonów DTM

- pary częstotliwości tonów DTMF dobrano precyzyjnie według przyjętego planu
- tony harmoniczne oraz produkty ich wzajemnych modulacji nie powodują nierozpoznawalności sygnałów DTMF,
- częstotliwości poszczególnych tonów dobrano tak, aby stosunek częstotliwości sąsiednich składowych był równy 21:19. Jest to nieznacznie mniej niż odległość całego tonu muzycznego,

13.2. Wykrywanie tonów DTMF

b) Wybór częstotliwości:
- żadna z częstotliwości składowych nie jest wielokrotnością (składową harmoniczną) innej,
- suma dwóch częstotliwości nie jest równa żadnej częstotliwości składowej,
- różnica dwóch częstotliwości nie jest równa żadnej częstotliwości składowej,

c) Stosunek do tonów muzycznych:
- tony nie powinny mieć częstotliwości muzycznych tzn. takich jak np.: 880Hz (a^2), 990 (h^2), 1056 (c^2),
- różnice między tonami nie powinny być interwałami muzycznymi takimi jak np.: sekunda, tercja, kwinta itp.,

d) Tolerancja częstotliwości:
- częstotliwości tonów nie mogą się zmieniać w stosunku do swych nominalnych wartości bardziej niż $\pm 1.8\%$
- częstotliwości spoza zakresu są ignorowane przez systemy rozpoznawania znaków,

e) Różnice w poziomach amplitud par sygnałów (*ang.: „twist”*):
- w sytuacji idealnej amplitudy tonów powinny być takie same,
- gdy sygnały są transmitowane w kanale telefonicznym amplitudy mogą się zmieniać,
- różnice w poziomach amplitud par sygnałów (zwane „twist”) mogą być nie większe niż 3 dB,

13.2. Wykrywanie tonów DTMF

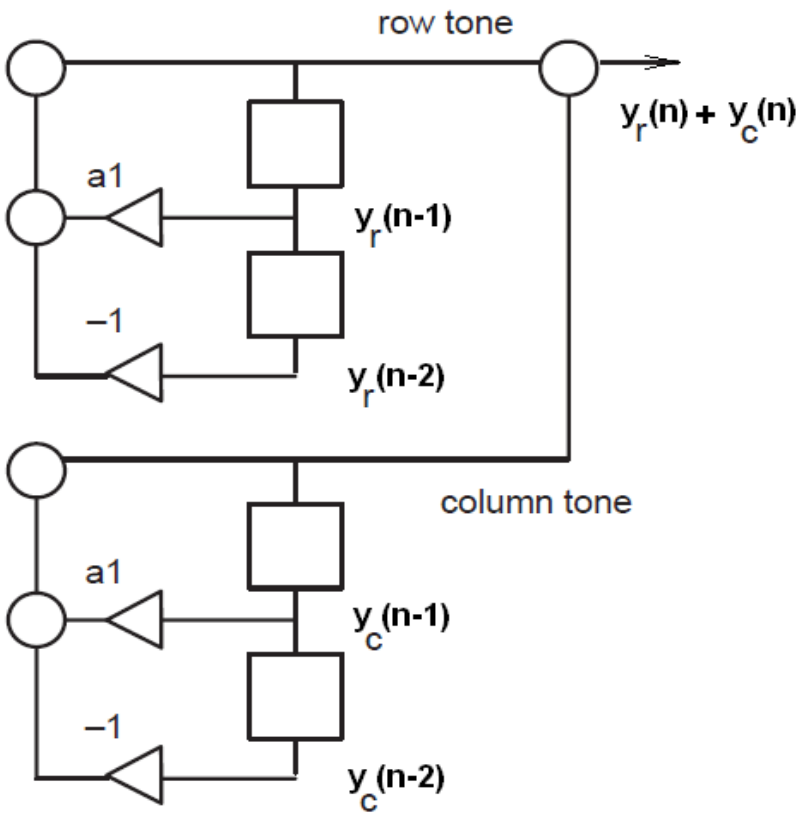
- różnice większe niż 6 dB mogą wskazywać na pary sygnałów, które nie są tonami DTMF.

f) Czasy trwania tonów DTMF:

- każdy ton DTMF powinien trwać minimum 70 ms,
- w niektórych krajach używane są tony o czasie trwania 45 ms,
- rozmiar ramki czasowej algorytmu detekcji DTMF wynosi typowo 22.5 ms.
- aby proces detekcji tonów DTMF był wiarygodny, potrzeba zwykle 2-3 ramek czasowych,

Metoda generowania tonów DTMF

Tony DTMF można wytwarzać za pomocą pary cyfrowych generatorów sinusoidalnych drugiego rzędu



13.2. Wykrywanie tonów DTMF

Tabela współczynników oraz wartości początkowych oscylatorów par tonów DTMF

f/Hz	a1	y(–1)	y(–2)/A
697	0.85382	0	–0.52047
770	0.82263	0	–0.56857
852	0.78433	0	–0.62033
941	0.73911	0	–0.67358
1209	0.58206	0	–0.81314
1336	0.49820	0	–0.86706
1477	0.39932	0	–0.91680
1633	0.28424	0	–0.95874

Metody rozpoznawania tonów DTMF

Tony DTMF stanowią stosunkowo nieliczny zbiór sygnałów sinusoidalnych, który dodatkowo podzielony został na dwie podgrupy o częstotliwościach [Hz]:

A={697, 770, 852, 941} oraz
B={1209, 1336, 1477, 1633}.

Do wykrywania maksymalnie 16 par tego typu sygnałów można stosować metody uproszczone.

13.2. Wykrywanie tonów DTMF

Metody rozpoznawania tonów DTMF (c.d.)

1. Metoda korelacyjna oparta o wyznaczanie funkcji korelacji badanego sygnału DTMF z parami funkcji

$$\mathbf{\sin(2\pi f_d t)} \qquad \text{oraz} \qquad \mathbf{\cos(2\pi f_d t)},$$

gdzie f_d ={ 697, 770, 852, 941, 1209, 1336, 1477, 1633}.

Użycie par sinus-cosinus pozwala w prosty sposób rozwiązać problem analizy fazy tonów składowych.

Po wyznaczeniu wszystkich funkcji korelacji wybiera się po jednym przedstawicielu z każdej grupy tonów A i B posiadającym największą wartość współczynnika korelacji. Na tej podstawie ustala się, którą parę częstotliwości DTMF jest badany sygnał, a tym samym jaki znak reprezentuje.

13.2. Wykrywanie tonów DTMF

Metody rozpoznawania tonów DTMF (c.d.)

2. Wyznaczenie DFT za pomocą algorytmu FFT i przeprowadzenie analizy w sposób podobny jak w metodzie korelacyjnej wybranych prążków modułu widma.

Stosując 256 punktowy algorytm FFT dla wektora częstotliwości tonów

A={**697, 770, 852, 941**} będą to prążki o numerach **22, 25, 28, 31** a dla wektora **B**={**1209, 1336, 1477, 1633**} odpowiednio **39, 43, 47, 52**.

3. Użycie banku „wąskich” środkowo przepustowych filtrów FIR o częstotliwościach środkowych odpowiadającym poszczególnym tonom DTMF.

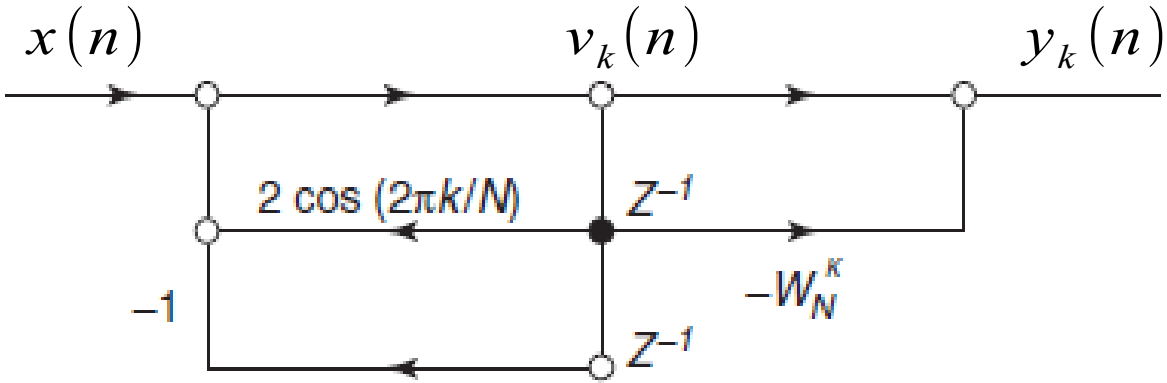
Przeprowadzenie analizy porównawczej w sposób podobny jak w metodzie korelacyjnej średnich mocy sygnałów na wyjściach filtrów.

13.2. Wykrywanie tonów DTMF

Metody rozpoznawania tonów DTMF (c.d.)

4. Użycie algorytmu Goertzela.
Metoda ta jest stosowana, gdy w analizie widmowej estymowana jest tylko niewielka liczba prążków widma – sygnał jest sumą kilku składowych sinusoidalnych.

Algorytm ten wykorzystuje własność DFT (którą można wykazać po kilku przekształceniach), iż amplitudę pojedynczego prążka widma uzyskamy na wyjściu filtru IIR o postaci:



i transmitancji $H(z)$ wyrażonej równaniem

$$H(z)=\frac{1-W_N^k\ z^{-1}}{1-2\cos(2\pi k/N)\ z^{-1}+z^{-2}},\quad \text{gdzie: } W_N^k=e^{-j2\pi k/N}.$$

13.2. Wykrywanie tonów DTMF

Metody rozpoznawania tonów DTMF (c.d.)

Prążek widma $X(k)$ (k-ty prążek) otrzymuje się obliczając *N* iteracji wyrażenia

$$v_k(n)=2\cos(2\pi k/N)\, v_k(n-1)-v_k(n-2)+x(n)$$

gdzie $v_k(-1)=v_k(-2)=0$ i w *N*- tym kroku wyznaczając

$$X(k)=y_k(N)=v_k(N)-W_N^k\, v_k(N-1).$$

Ostatnim etapem jest policzenie kwadratu modułu $|X(k)|^2$.

Postępując w sposób opisany powyżej dla wszystkich prążków odpowiadających częstotliwościom tonów DTMF, uzyskuje się zbiór wartości, które poddane podobnej analizie jak w metodzie korelacyjnej pozwalają wyznaczyć odpowiednie pary tonów.

13.2. Wykrywanie tonów DTMF

Omówienie metody korelacyjnej rozpoznawania tonów DTMF

Zakłada się, że analizowany cyfrowy sygnał DTMT ma postać

$$x(n)=C(\sin(2\pi f_A n/f_s+\varphi_1)+\sin(2\pi f_B n/f_s+\varphi_2)),$$

gdzie: C -amplituda, $f_s=8000$ to częstotliwość próbkowania [Hz],
$f_A=\{697,770,852,941\}$ częstotliwości pierwszej grupy tonów,
$f_B=\{1209,1336,1477,1633\}$ częstotliwości drugiej grupy tonów DTMF.
Ze względu na występowanie nieznanych wartości faz φ_1 oraz φ_1 analizy korelacyjnej należy użyć par sinus-cosinus.

Kolejne etapy metody korelacyjnej:

1. Dla każdej częstotliwości ze zbiorów f_A i f_B policzyć funkcję korelacji z badanym sygnałem $x(n)$.

$$W_{\sin 697}=\sum_{n=1}^{N} x(n)\sin(2\pi 697 n/8000),\ W_{\cos 697}=\sum_{n=1}^{N} x(n)\cos(2\pi 697 n/8000),$$

$$W_{\sin 770}=\sum_{n=1}^{N} x(n)\sin(2\pi 770 n/8000),\ W_{\cos 770}=\sum_{n=1}^{N} x(n)\cos(2\pi 770 n/8000),$$

$$\ldots$$

$$W_{\sin 1477}=\sum_{n=1}^{N} x(n)\sin(2\pi 1477 n/8000),\ W_{\cos 1477}=\sum_{n=1}^{N} x(n)\cos(2\pi 1477 n/8000),$$

13.2. Wykrywanie tonów DTMF

Omówienie metody korelacyjnej rozpoznawania tonów DTMF (c.d.)

2. Dla każdej częstotliwości znaleźć „uśredniony” współczynnik korelacji będący miarą podobieństwa badanego sygnału z danym tonem DTMF. Przykładowo można zastosować następujące przekształcenie:

$$W_{697}=\sqrt{W_{\sin 697}^2+W_{\cos 697}^2},$$
$$W_{770}=\sqrt{W_{\sin 770}^2+W_{\cos 770}^2},$$
$$\dots$$
$$W_{1477}=\sqrt{W_{\sin 1477}^2+W_{\cos 1477}^2},$$

3. Wybrać dwa największe współczynniki pierwszy, spośród wartości

odpowiadających grupie tonów A: $W_1=max\left(W_{697}, W_{770}, W_{852}, W_{941}\right),$

raz drugi dla grupy tonów B: $W_2=max\left(W_{1209}, W_{1336}, W_{1477}\right).$

4. Określić, czy badany sygnał zawiera tony DTMF – czy współczynniki W_1 i W_2 przekraczają przyjęty poziom odniesienia.

5. Jeśli $x(n)$ jest sygnałem DTMF określić jaki znak reprezentuje, np. gdy $W_1=W_{770}$ a $W_2=W_{1477}$ sygnał reprezentuje znak **'6'** itd.

13.4. Efekty akustyczne

1. Echo - pojedyncze odbicie:

$$y(n)=x(n)+a\,x(n-D)$$

D - opóźnienie czasowe dotarcia do słuchacza dźwięku odbitego od ściany (dźwięku pośredniego) w stosunku do dźwięku bezpośredniego,

a - miara strat wynikających z transmisji i odbicia dzięku pośredniego $|a|\leqslant 1$.

Transmitancja $H(z)$ oraz odpowiedź impulsowa:

$$H(z)=1+az^{-D}, \qquad h(n)=\delta(n)+a\delta(n-D)\ .$$

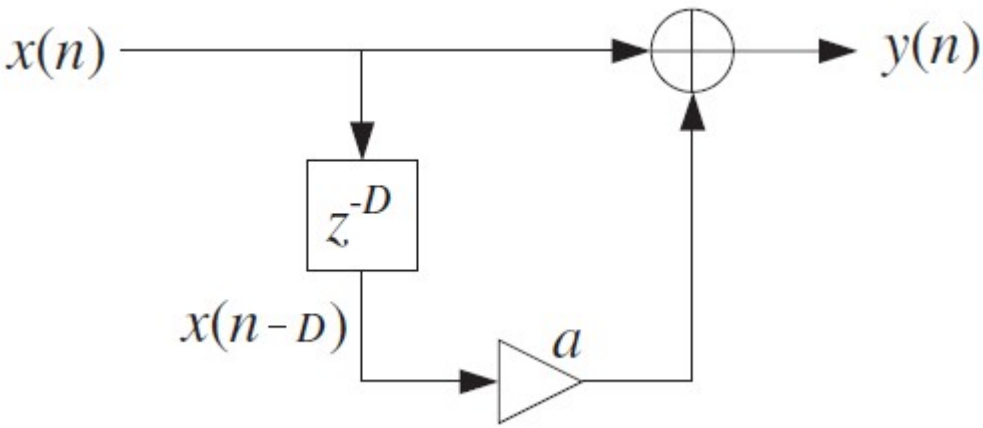
Transmitancja $H(\omega)$ otrzymana przez podstawienie $z=e^{j\omega}$ oraz moduł transmitancji $|H(\omega)|$:

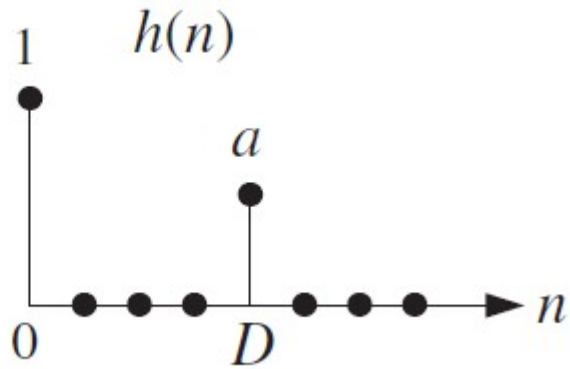
$$H(\omega)=1+ae^{-j\omega D}, \qquad |H(\omega)|=\sqrt{1+2a\cos(\omega D)+a^2}$$

13.4. Efekty akustyczne

1. Echo c.d.:

Schemat blokowy algorytmu oraz wykres odpowiedzi impulsowej:





Układ generujący echo pracuje jako *filtr grzebieniowy FIR* o maksimach rozmieszczonych wokół częstotliwości $f_1 = f_s / D$, gdzie f_s jest częstotliwością próbkowania oraz minimach odpowiadających zerom wielomianu

$$1 + az^{-D} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z_k = \rho e^{\pi j (2k+1)/D}, \quad k = 0, 1, \ldots, D-1$$

gdzie $\rho = a^D$.

13.4. Efekty akustyczne

1. Echo c.d.:

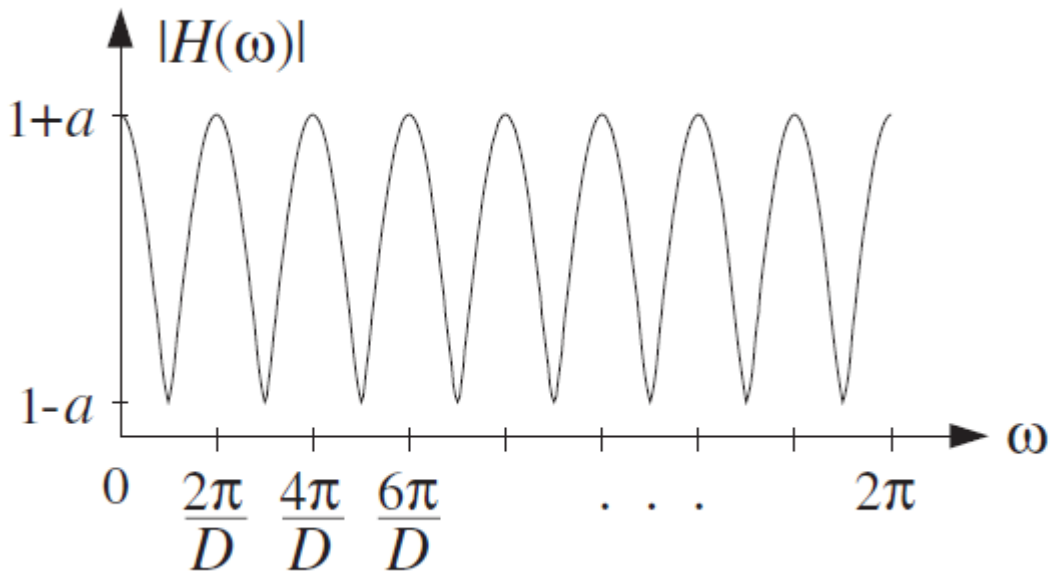
Pulsacje maksimów - częstotliwość podstawowa repetycji:

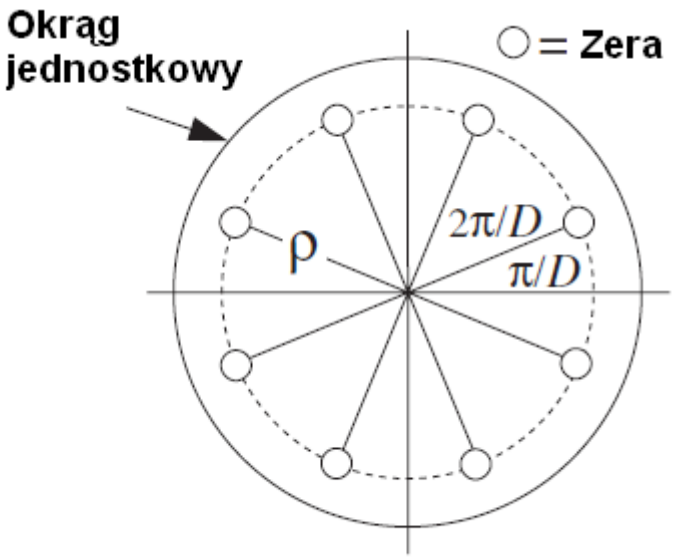
$$\omega_k = (2k)\pi / D, \quad k = 0, 1, \ldots, D-1 .$$

Pulsacje minimów: $\omega_k = (2\mathrm{k}+1)\pi k / D, \quad k = 0, 1, \ldots, D-1 .$

Przykład dla $D = 8$:

Moduł transmitancji fitru grzebieniowego oraz rozmieszczenie zer na płaszczyźnie zespolonej:





13.4. Efekty akustyczne

1. Echo c.d. - odejmowanie sygnału odbicia: $y(n)=x(n)-a\,x(n-D)$

Transitancje $H(z)$ oraz $H(\omega)$: $H(z)=1-az^{-D}$, $H(\omega)=1-ae^{-j\omega D}$

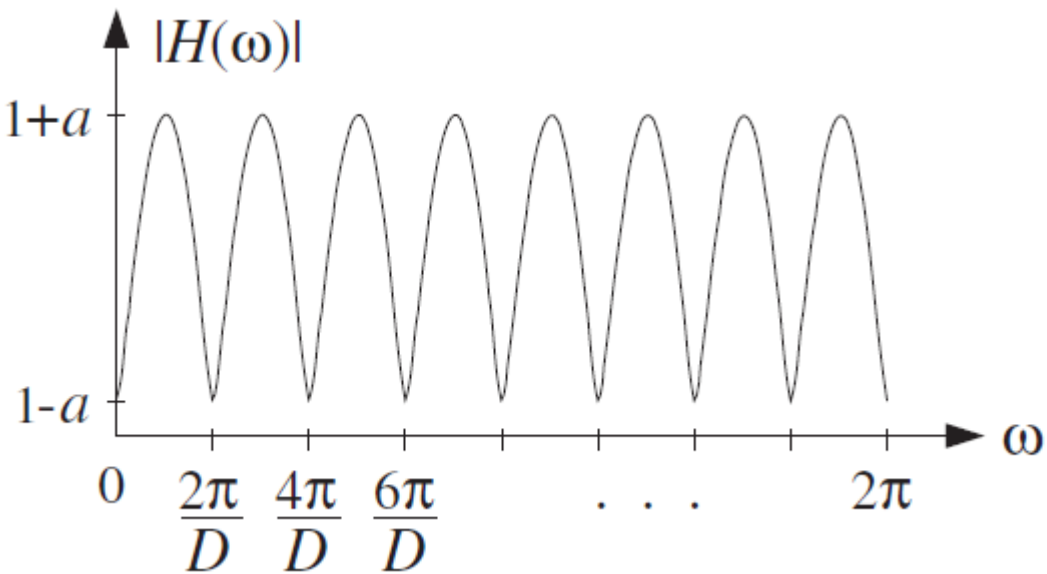
Pulsacje maksimów - częstotliwość podstawowa repetycji:

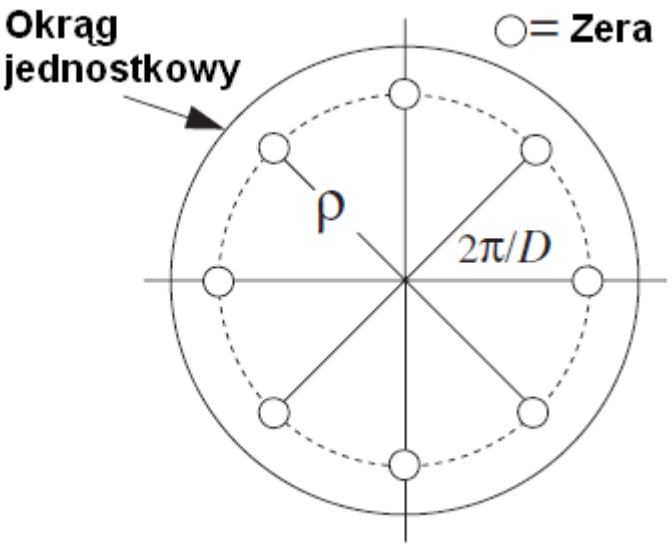
$$\omega_k=(2\mathrm{k}+1)\pi k/D,\quad k=0,1,\ldots,D-1\,.$$

Pulsacje minimów: $\omega_k=(2\,k)\pi/D,\quad k=0,1,\ldots,D-1\,,$

Przykład dla $D=8$:

Moduł transmitancji fitru grzebieniowego oraz rozmieszczenie zer na płaszczyźnie zespolonej:





13.4. Efekty akustyczne

2. Pogłos - wielokrotne odbicia.

Jeśli dodamy trzy kolejne echa otrzymamy filtr:

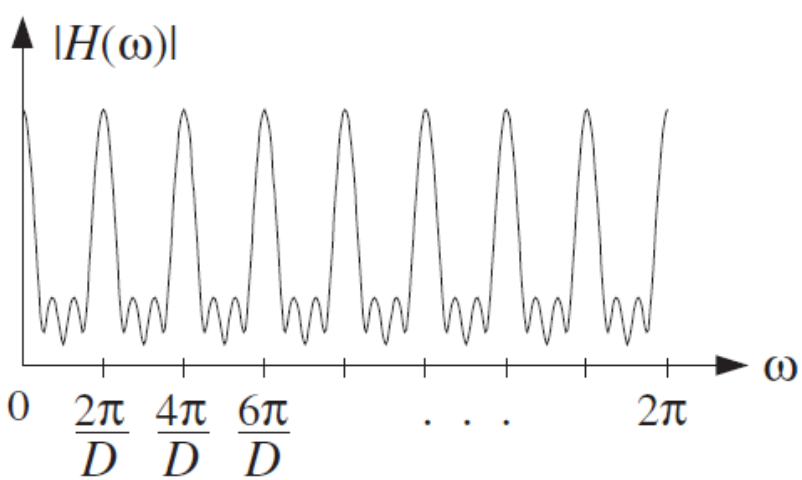
$$y(n)=x(n)+a\,x(n-D)+a^2x(n-2D)+a^3x(n-3D)$$

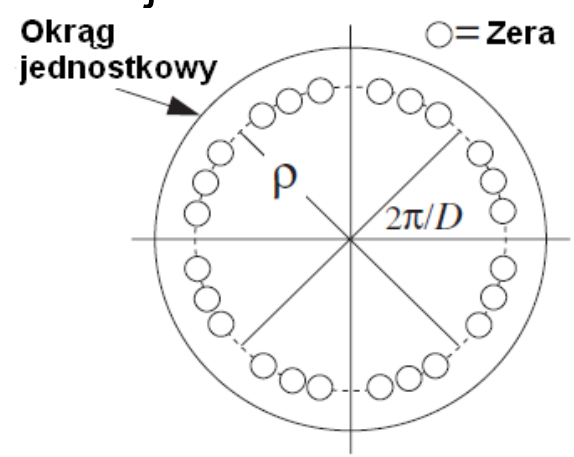
Korzystając z wzoru na sumę skończonego szeregu geometrycznego transmitancję $H(z)$ można wyrazić w postaci:

$$H(z)=1+az^{-D}+a^2z^{-2D}+a^3z^{-3D}=\frac{1-a^4z^{-4D}}{1-az^{-D}}$$

Zera licznika nie pokrywają się z zerami mianownika, które to generują maksima na charakterystyce częstotliwościowej filtru dla pulsacji k ,będących wielokrotnością liczby 4. Maksima te są równe $H(\omega_k)=1+a+a^2+a^3$.

Przykład dla $D=8$: moduł transmitancji fitru grzebieniowego oraz rozmieszczenie zer na płaszczyźnie zespolonej:





13.4. Efekty akustyczne

2. Pogłos c.d.- wielokrotne odbicia.

Jeśli dodamy nieskończoną liczbę kolejnych ech to otrzymamy filtr:

$$y(n)=x(n)+a\,x(n-D)+a^2 x(n-2D)+a^3 x(n-3D)+.....$$

Korzystając z wzoru na sumę nieskończonego szeregu geometrycznego transmitancję $H(z)$ można wyrazić w postaci:

$$H(z)=1+a\,z^{-D}+a^2 z^{-2\mathrm{D}}+a^3 z^{-3\mathrm{D}}+.....=\frac{1}{1-a\,z^{-D}}$$

Jest to transmitancja *filtru grzebieniowego typu IIR* - filtru pogłosowego (rewerberatora) opisanego równaniem różnicowym:

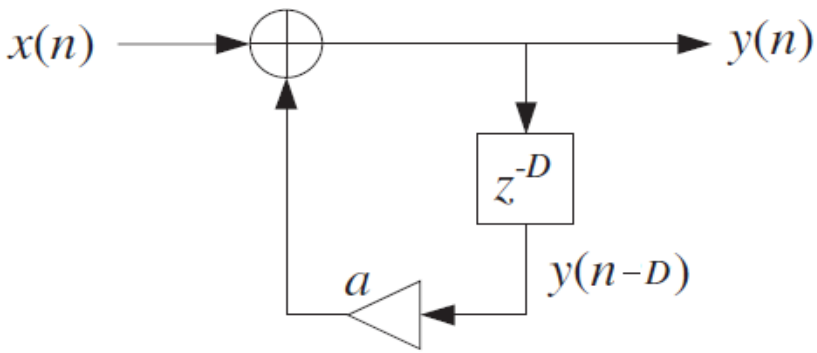
$$y(n)=a\,y(n-D)+x(n).$$

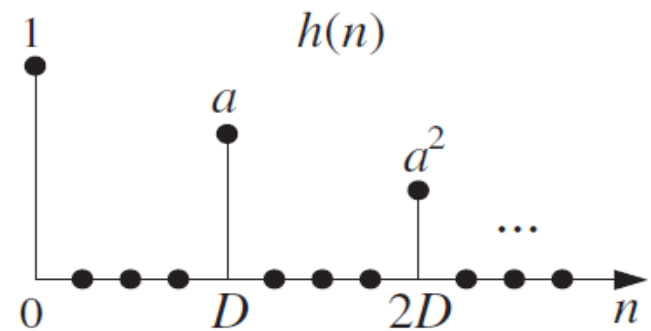
Transmitancja $H(z)$ ma bieguny w punktach $p_k=\rho\,e^{j\omega_k},\ k=0,1,\ldots,D-1,$ gdzie $\omega_k=2\pi\,k/D$ oraz $\rho=a^{1/D}$. Bieguny te są równomiernie rozłożone na okręgu o promieniu ρ. Częstotliwość podstawowa repetycji jest równa $f_1=f_s/D$ **Hz** $(\omega_1=2\pi/D)$, gdzie f_1 to częstotliwość próbkowania.

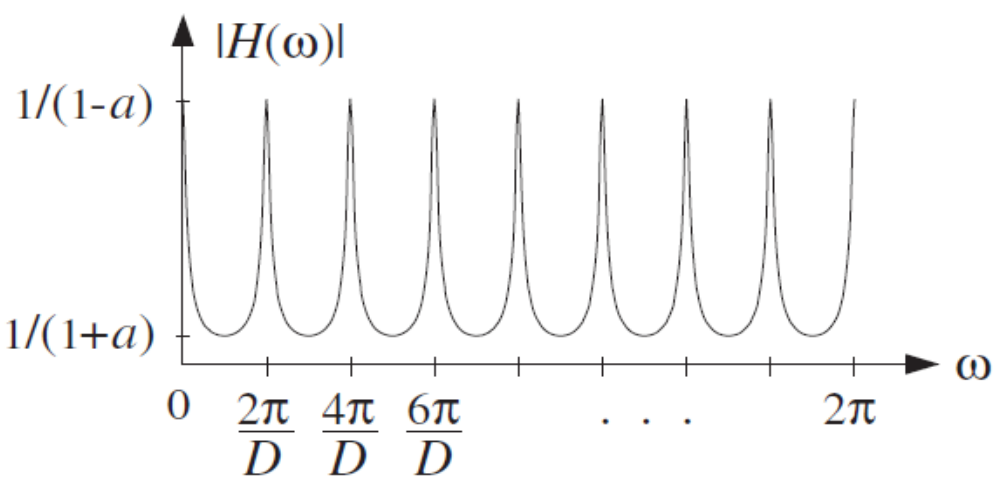
13.4. Efekty akustyczne

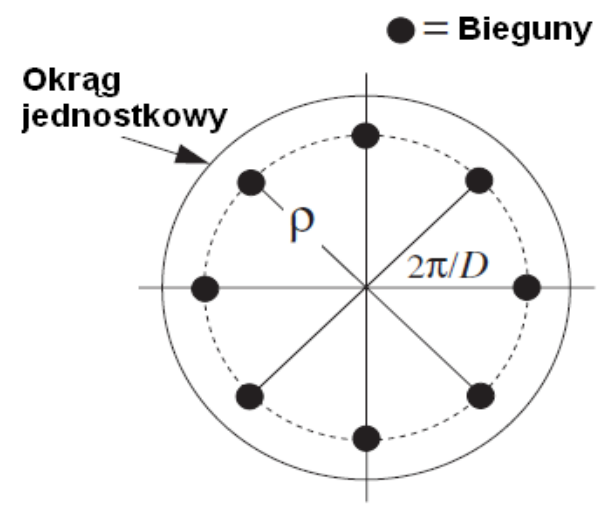
2. Pogłos c.d.- wielokrotne odbicia.

Przykład dla $D=8$: schemat blokowy filtru fitru grzebieniowego IIR, odpowiedź impulsowa, moduł transmitancji oraz rozmieszczenie biegunów na płaszczyźnie zespolonej:









13.4. Efekty akustyczne

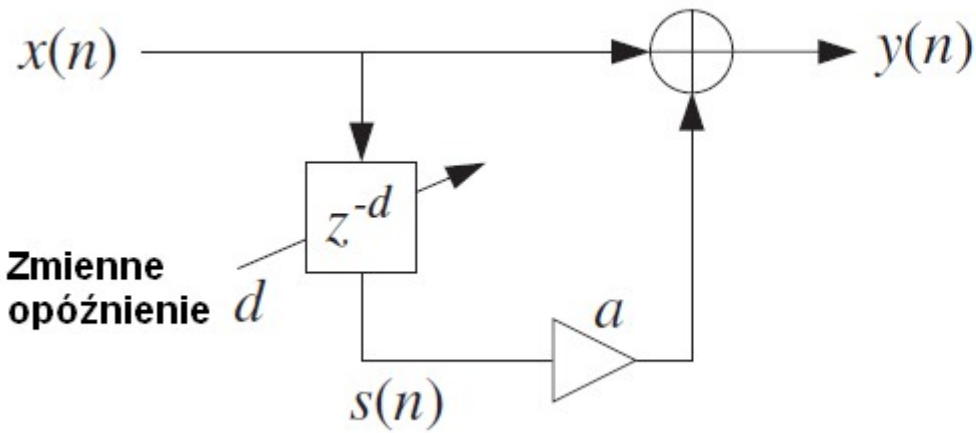
3. Flanger - powolne okresowe zmiany opóźnienia.

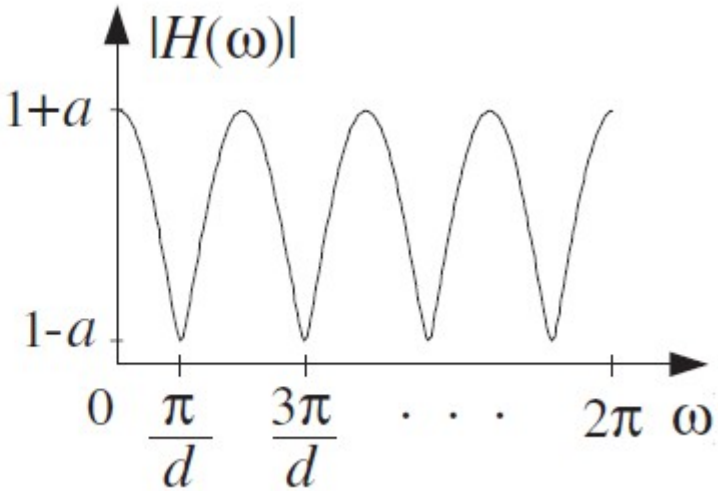
$$y(n)=x(n)+a\,x(n-d(n))$$

$$d(n)=\frac{D}{2}(1-\cos(2\pi F_d n))$$

gdzie F_d częstotliwość powolnych zmian opóźnienia.

Schemat blokowy filtru grzebieniowego oraz jego moduł transmitancji:



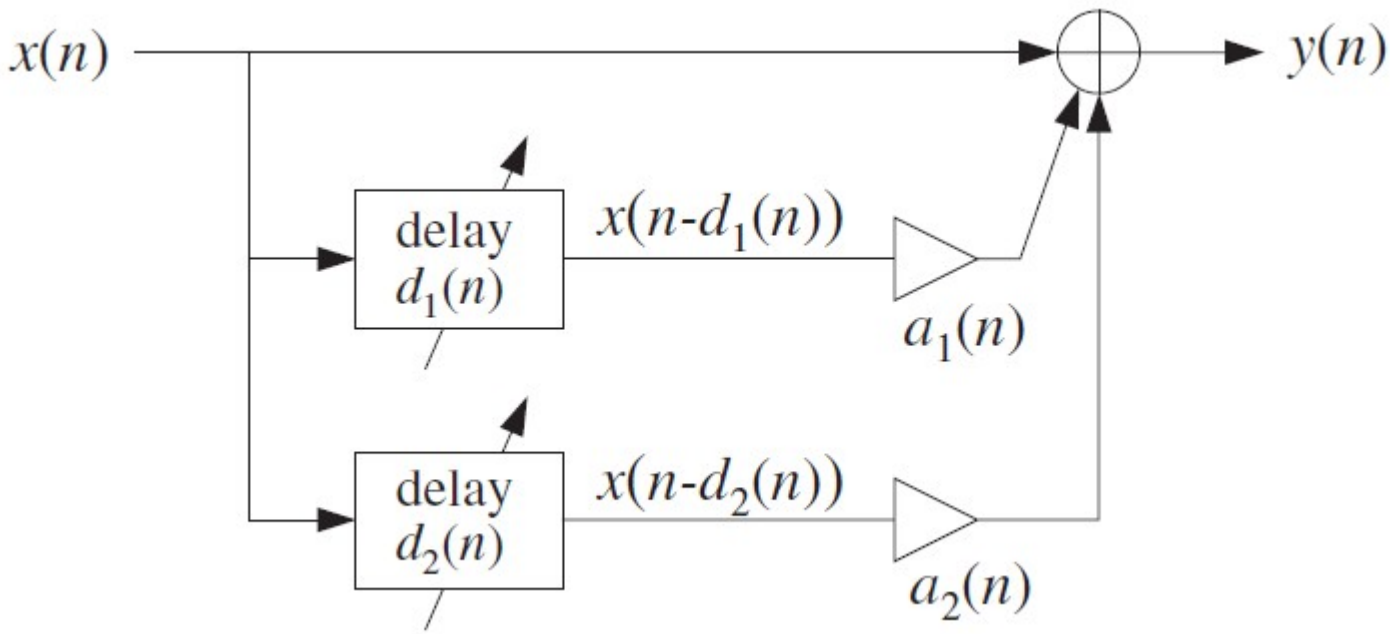


13.4. Efekty akustyczne

3. Chorus - efekt chóru.

$$y(n)=x(n)+a_1 x(n-d_1(n))+a_2 x(n-d_2(n))$$

$$d_1(n)=D(0{,}5+\nu_1(n)), \qquad d_2(n)=D(0{,}5+\nu_2(n)),$$

gdzie $\nu_1(n), \nu_2(n)$ to generatory wolnozmieniających się liczb losowych o wartości średniej równej zero. Przedział zmian: [-0,5; 0,5).

Schemat blokowy filtru grzebieniowego: