# *13.2. Filtry cyfrowe*

**Bibliografia:**


1. Chassaing Rulph, *Digital Signal Processing and Applications with the C6713 and C6416 DSK*, Wiley-Interscience 2005.

2. Borodziewicz W., Jaszczak K., *Cyfrowe Przetwarzanie sygnałów*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne W-wa 1987.

3. Orfanidis S.J., *Introduction to Signal Processing*, PrenticeHall International, Inc.1996.

4. Wojtkiewicz A. *Elementy syntezy filtrów cyfrowych*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne W-wa 1984.

# *13.2. Filtry cyfrowe*

Filtrem cyfrowym nazywamy liniowy i stacjonarny układ (algorytm), który jednoznacznie przekształca dany ciąg liczb (sygnał wejściowy) w inny ciąg liczb (sygnał wyjściowy). Zakładamy przy tym, że przetwarzany ciąg reprezentuje sygnał jednowymiarowy.

**Zalety filtrów cyfrowych w porównaniu z filtrami analogowymi:**

- łatwość otrzymywania charakterystyk częstotliwościowych o praktycznie dowolnym kształcie w pasmie przepustowym, dużych poziomach tłumienia w pasmie zaporowym oraz wąskim pasmie przejściowym,
- możliwość uzyskiwania filtrów o liniowej charakterystyce fazowej (filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej SOI {*ang. FIR}*),
- parametry filtrów cyfrowych są stałe w czasie — w układach cyfrowych nie istnieje problem starzenia się elementów.
- większa elastyczność w procesie projektowania — zarówno faza projektowania jak i prób odbywa się przy użyciu komputera — nie trzeba budować hardwerowego prototypu filtru,
- krótszy czas projektowania.

# *13.2. Filtry cyfrowe*

**Wady filtrów cyfrowych w porównaniu z filtrami analogowymi:**

- pasmo przenoszenia filrów cyfrowych jest ograniczone do połowy częstotliwości próbkowania podczas, gdy pasmo przenoszenia filtrów analogowych jest teoretycznie nieograniczone — stąd oś częstotliwości na wykresach filtrów cyfrowych jest zazwyczaj liniowa, podczas gdy dla filtrów analogowych oś ta jest najczęściej podawana w skali logarytmicznej, - w filtrach cyfrowych dynamika przetwarzanych sygnałów jest ograniczona rozdzielczością przetwornika analogowo-cyfrowego (6 dB/bit stąd 16 bitowy przetwornik może maksymalnie zapewnić dynamikę 96 dB, w praktyce ok. 86 dB). W przypadku filtów analogowych teoretycznie nie ma takiego ograniczenia (dla układów biernych),

**Klasyfikacja filtrów cyfrowych:**

Rozróżnia się dwa rodzaje filtrów cyfrowych: o skończonej odpowiedzi impulsowej **SOI** (ang.: **FIR** - *Finite Impulse Response*) oraz o nieskończonej odpowiedzi impulsowej **NOI** (ang.: **IIR** - *Infinite Impulse Response*).
***Filtry FIR opisane są równaniem:***

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1} h_k x(n-k), \qquad (13.2.1)$$

gdzie: $h=\left[h_0, h_{1,} \ldots, h_{N-1}\right]$ wektor współczynników odpowiedzi impulsowej.

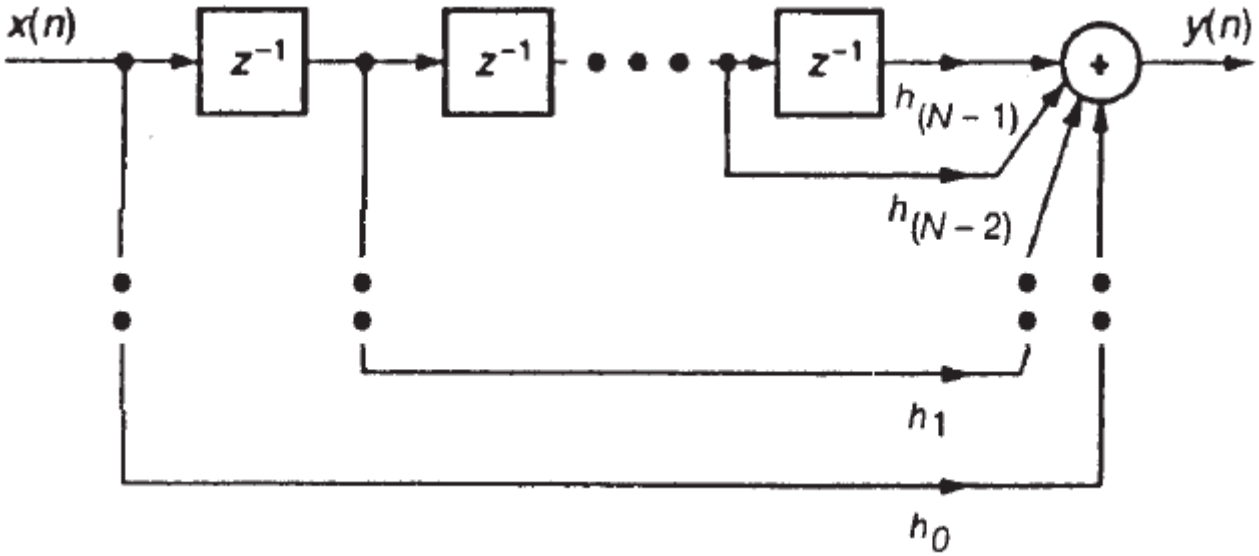
# 13.2. Filtry cyfrowe

W wyniku transformaty $Z$ zależności (13.2.1) otrzymuje się

$$Y(z)=h_0 X(z)+h_1 z^{-1} X(z)+h_2 z^{-2} X(z)+\ldots+h_{N-1} z^{-(N-1)} X(z)$$
$$=H(z)X(z),$$

gdzie $$H(z)=\sum_{k=0}^{N-1} h_k z^{-k}=h_0+h_1 z^{-1}+h_2 z^{-2}+\ldots+h_{N-1} z^{-(N-1)}$$

jest transmitancją filtru **FIR**.




Struktura bezpośrednia układu **FIR**.

# *13.2. Filtry cyfrowe*

**Cechy filtrów o skończonej odpowiedzi impulsowej (FIR):**

- liniowa charakterystyka fazowa, wszystkie składowe sygnału opóźniane są w takim samym stopniu,
- gwarantowana stabilność spowodowana brakiem biegunów w funkcji transmitancji,
- prostsze projektowanie filtrów w porównaniu z IIR,
- w przypadku projektowania filtrow o dużych poziomach tłumienia w pasmie zaporowym oraz wąskim pasmie przejściowym wymagana jest bardzo duża liczba współczynników $h_i, i=0,1,\ldots,N-1,$ stąd duża złożoność obliczeniowa takich algorytmów w porównaniu z filtracją **IIR**.

***Filtry IIR opisane są równaniem:***

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k)+\sum_{j=1}^{M} b_j y(n-j), \qquad (13.2.2)$$

Gdzie: $a=[a_1, a_2, \ldots, a_M]$, $b=[b_0, b_1, \ldots, b_N]$ to wektory współczynników filtru. W wyniku transformaty *Z* zależności (13.2.2) otrzymuje się

$$Y(z)=a_0 X(z)+a_1 z^{-1} X(z)+a_2 z^{-2} X(z)+\ldots+a_N z^{-N} X(z)$$
$$+b_1 z^{-1} Y(z)+b_2 z^{-2} Y(z)+\ldots+b_M z^{-M} Y(z).$$

# 13.2. Filtry cyfrowe

Transmitancję $H(z)$ filtru **IIR** opisuje zależność:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{a_0+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+\ldots+a_N z^{-N}}{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}+\ldots+b_M z^{-M}}=\frac{N(z)}{D(z)},$$

gdzie $N(z)$ oraz $D(z)$ to odpowiednio wielomiany licznika i mianownika transmitancji. Przyjmując, że $M=N$ oraz mnożąc licznik i mianownik przez $z^N$ otrzymamy:

$$H(z)=\frac{a_0 z^N+a_1 z^{N-1}+a_2 z^{N-2}+\ldots+a_N}{Z^N+b_1 z^{N-1}+b_2 z^{N-2}+\ldots+b_N}=C\prod_{i=1}^{N}\frac{z-z_i}{z-p_i}.$$

Jest to funkcja przenoszenia posiadająca $N$ zer i $N$ biegunów. Dla zapewnienia stabilności filtru, wszystkie bieguny muszą leżeć wewnątrz okręgu jednostkowego — moduły wszystkich biegunów muszą być mniejsze od jedności $|p_i|<1,\ \ i=1,\ldots,N$. Jeśli wszystkie współczynniki $b_i=0,\ \ i=1,\ldots,N$, filtr **IIR** staje się zawsze stabilnym filtrem **FIR**.

# *13.2. Filtry cyfrowe*

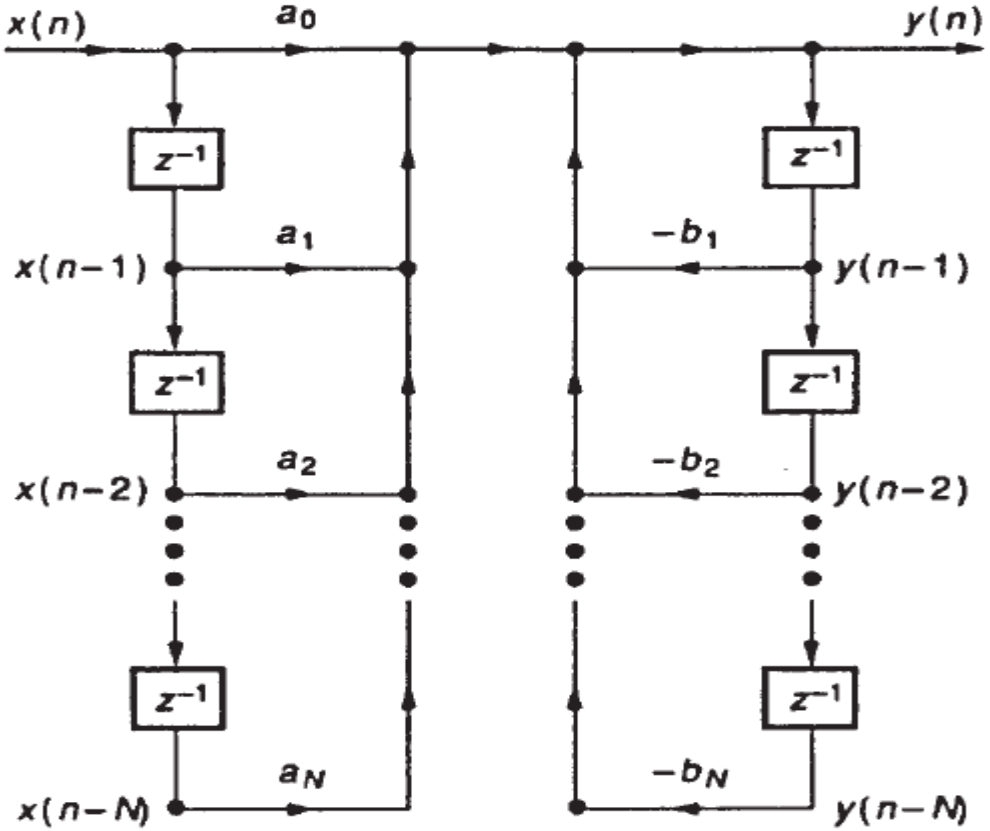
**Cechy filtrów o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (IIR):**

- niska złożoność obliczeniowa algorytmów **IIR** w porównaniu z filtracją **FIR**,
- łatwa implementacja stosunkowo nieskomplikowanych algorytmów,
- zagrożenie utraty stabilności, gdy bieguny transmitancji położone są na zewnątrz okręgu jednostkowego,
- brak możliwości zaprojektowania filtru o liniowej charakterystyce fazowej,
- znacznie trudniejsze w porównaniu z **FIR** projektowanie filtrów.

**Struktury filtrów IIR**

Istnieje kilka odmian struktur filtrów IIR. Najpopularniejsze to:

***Struktura bezpośrednia I (Direct Form I):***



# 13.2. Filtry cyfrowe

***Struktura bezpośrednia II (Drect Form II):***

Rozpisując zależność:

$$Y(z)=\frac{N(z)}{D(z)}X(z),$$

Na dwa wyrażenia:

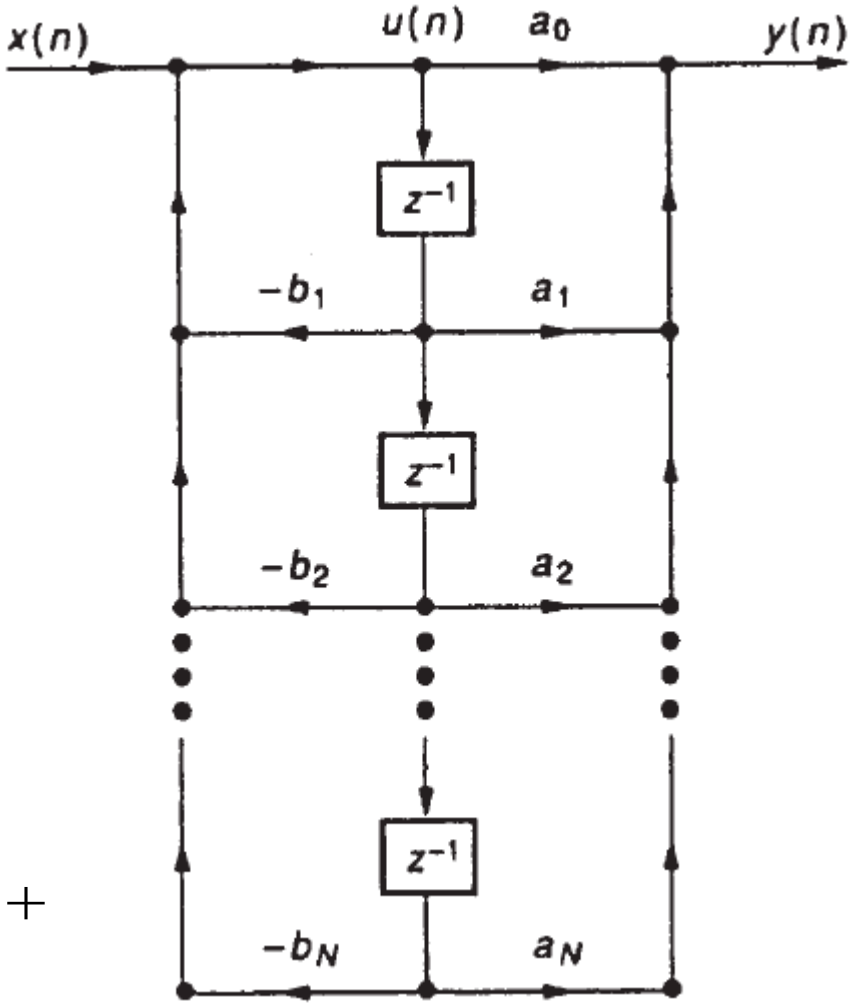
$$U(z)=\frac{X(z)}{D(z)},$$

$$Y(z)=\frac{N(z)X(z)}{D(z)}=N(z)U(z),$$

a następnie stosując odwrotną transformatę *Z* otrzymuje się:

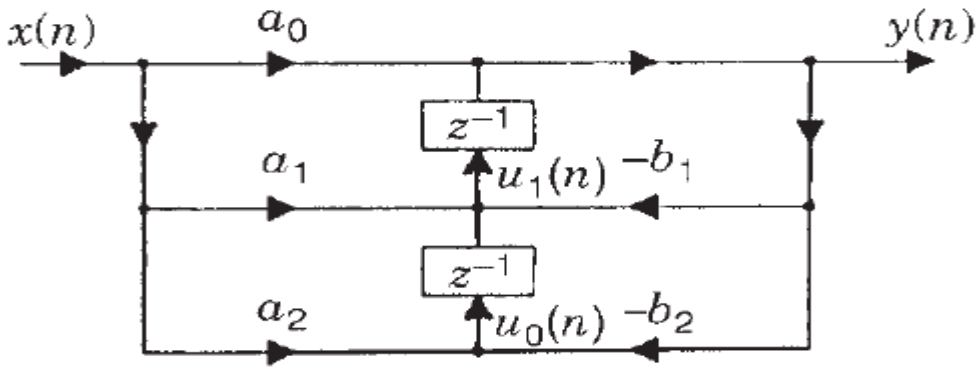
$$u(n)=x(n)-b_1u(n-1)-b_2u(n-2)+\ldots-b_Nu(n-N),$$

$$y(n)=a_0u(n)+a_1u(n-1)+a_2u(n-2)+\ldots+a_Nu(n-N).$$



# 13.2. Filtry cyfrowe

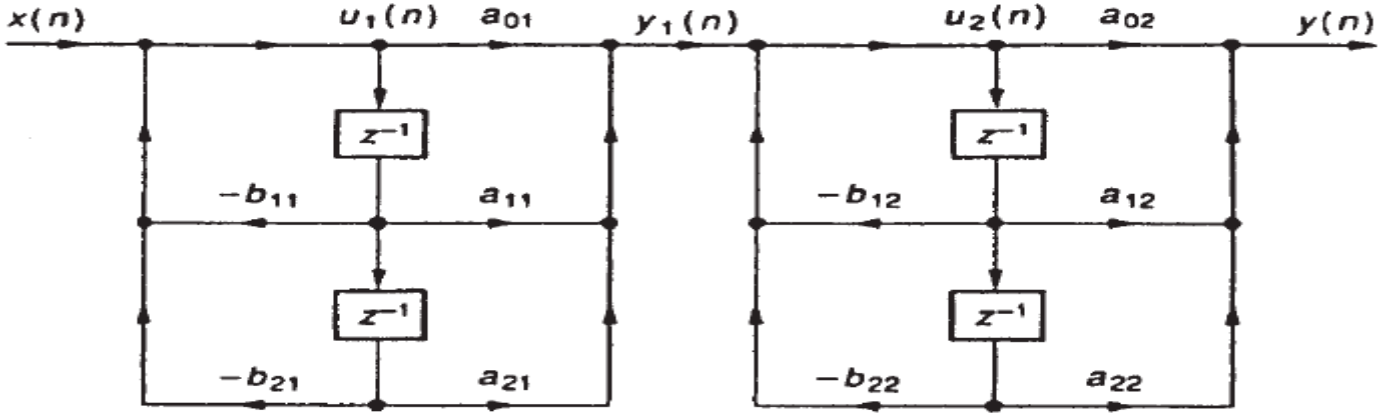
***Struktura dualna (transponowana) realizacji bezpośredniej układu IIR (Drect Form II):***




**<u>Łączenie Filtrów</u>**

**- Szeregowe:** kaskada struktur drugiego rzedu

$$H(z)=C\,H_1(z)H_2(z)\ldots H_r(z), \qquad H(z)=\prod_{i=1}^{N/2}\frac{a_{0i}+a_{1i}z^{-1}+a_{2i}z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}.$$



# 13.2. Filtry cyfrowe

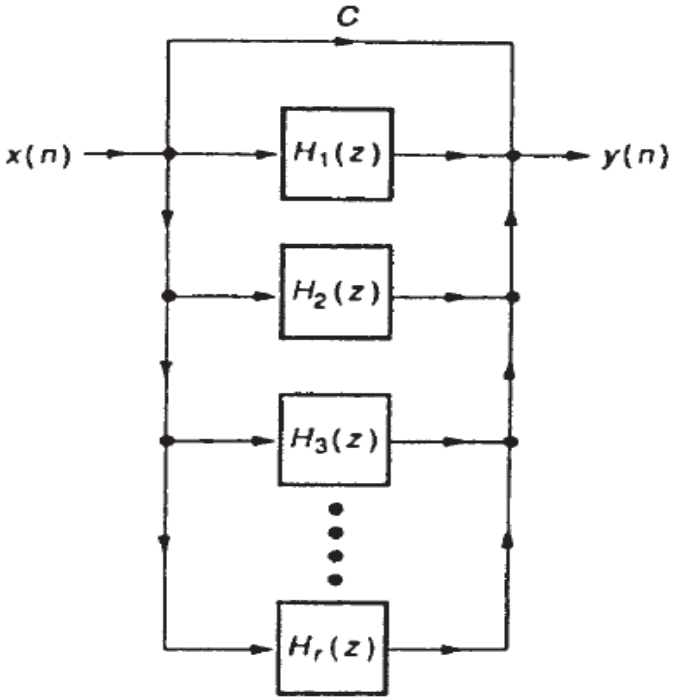
## Łączenie Filtrów (cd.)

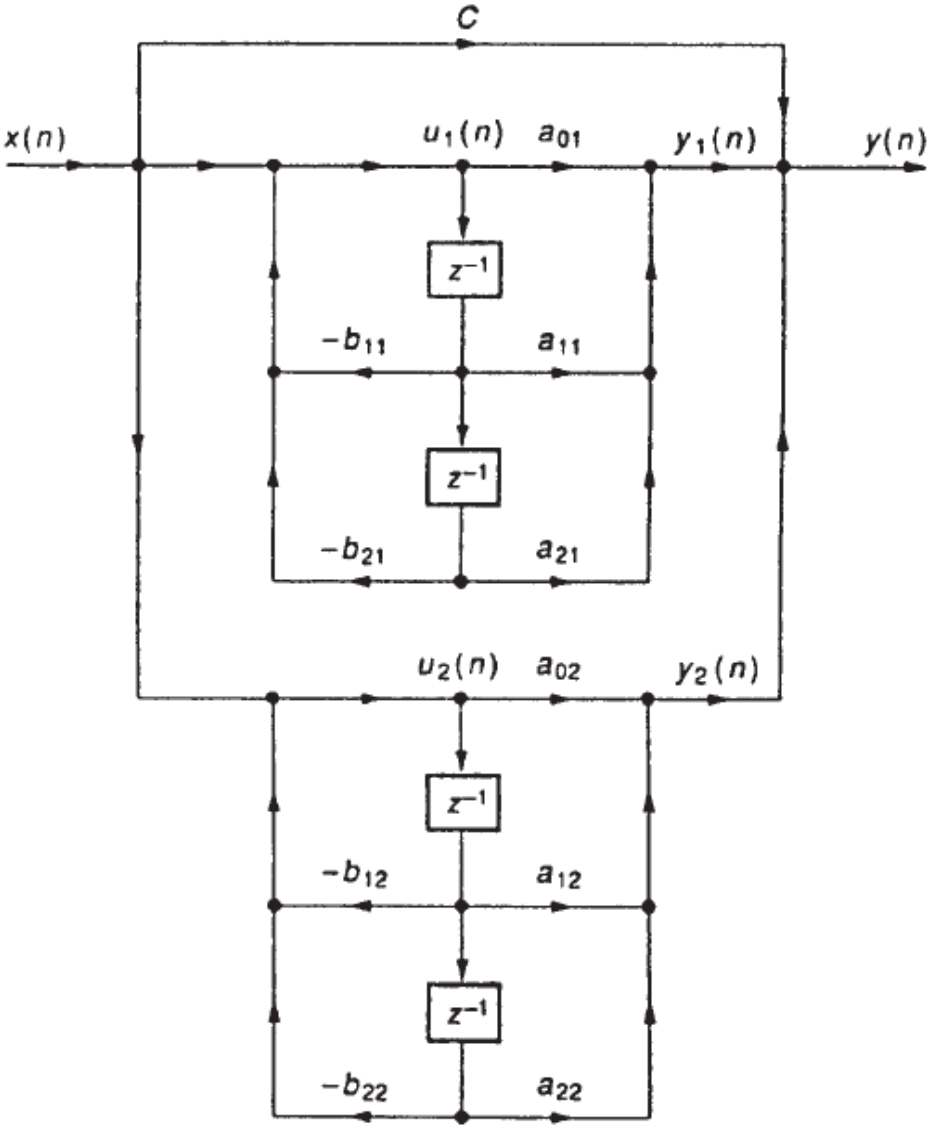
**- Równoległe:** np. ze struktur drugiego rzędu

$$H(z)=C+H_1(z)+H_2(z)+\ldots+H_r(z),$$

$$H(z)=C+\sum_{i=1}^{N/2}\frac{a_{0i}+a_{1i}z^{-1}+a_{2i}z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}.$$

$$y(n)=C\,x(n)+\sum_{i=1}^{N/2}y_i(n).$$



# *13.2. Filtry cyfrowe*

***<u>Etapy projektowania filtrów cyfrowych</u>***

**- Specyfikacja wymagań stawianych projektowanemu filtrowi.** W zależności od przyszłego zastosowania układu, zalecenia projektowe mogą dotyczyć dziedziny częstotliwości (określany jest obszar przebiegu charakterystyki amplitudowej lub fazowej), bądź dziedziny czasu (określany jest kształt odpowiedzi impulsowej).

- **Aproksymacja:** przybliżanie idealnych charakterystyk częstotliwościowych, fazowych lub odpowiedzi impulsowej za pomocą dostępnych modeli matematycznych. W efekcie powstaje projekt dający się zrealizować za pomocą liniowego, stabilnego i stacjonarnego układu dyskretnego.

- **Realizacja:** poszukiwanie struktury filtru spełniającej założone wymagania, optymalne w sensie złożoności sprzętowej i obliczeniowej.

- **Implementacja:** realizacja filtru w wybranej technologii, np. za pomocą układu zawierającego procesor sygnałowy.

# 13.2. Filtry cyfrowe

## Projektowanie filtrów cyfrowych FIR

### Metoda okien

Jest to jedna z częsciej wykorzystywanych prosych metod projektowania filtrów cyfrowych o skończonej odpowiedzi impulsowej. Pierwszym etapem jest znalezienie odpowiedzi impulsowej filtru idealnego d(k). W tym celu wykorzystuje się charakterystykę częstotliwościową idealnego filtru dolnoprzepustowego D(ω) opisanego w sposób następujący:

$$D(\omega)=\left\{\begin{array}{lll} 1 & dla & -\omega_c \leqslant \omega \leqslant \omega_c \\ 0 & dla & -\pi \leqslant \omega < \omega_c \quad lub \quad \omega_c < \omega \leqslant \pi \end{array}\right\}.$$

gdzie $\omega_C$ to częstość odcięcia filtru.

Następnie wykorzystując odwrotną dyskretną transformatę Fouriera IDTFT (ang.: *Inverse Discrete-time Fourier Transform*) otrzymujemy odpowiedź impulsową:

$$d(k)=\frac{\sin(\omega_c k)}{\pi k}, \qquad d(0)=\frac{\omega_c}{\pi}.$$

# 13.2. Filtry cyfrowe

## Projektowanie filtrów cyfrowych FIR

### Metoda okien

W podobny sposób można znaleźć odpowiedzi impulsowe idealnych filtrów górnoprzepustowych, pasmowoprzepustowych oraz zaporowych.

Filtr górnoprzepustowy -

$$d(k)=\delta(k)-\frac{\sin(\omega_c k)}{\pi k},$$

Filtr pasmowoprzepustowy -

$$d(k)=\frac{\sin(\omega_b k)-\sin(\omega_a k)}{\pi k},$$

Filtr pazmowozaporowy -

$$d(k)=\delta(k)-\frac{\sin(\omega_b k)-\sin(\omega_a k)}{\pi k}.$$

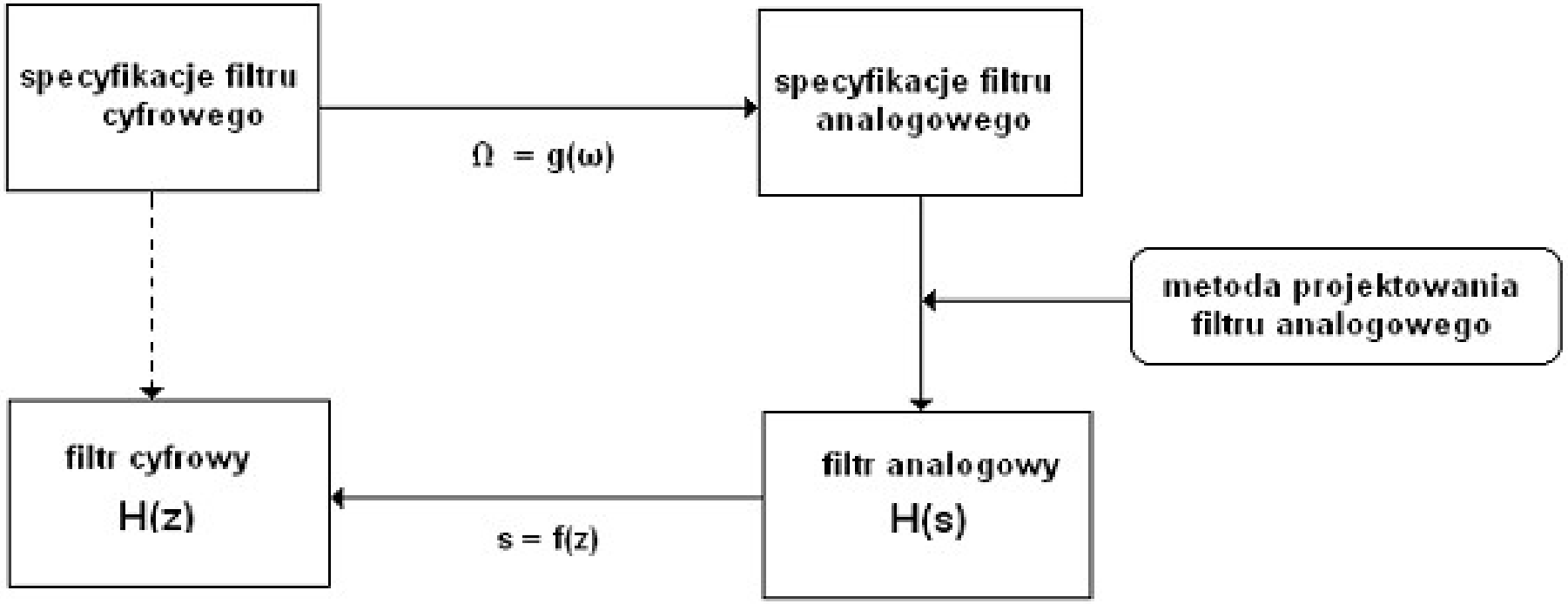
Następnie należy dwustronną odpowiedź impulsową d(k), która nie jest przyczynowa i nieskończona, obciąć do skończonej długości mnożąc przez funkcję okna w(n). Naogół wybiera się nieparzysty rząd filtru (długość okna) równą N = 2M +1. N-wymiarowy wektor współczynników filtru FIR ma postać $d = [d_{-M},....,d_{-1}, d_0, d_1, ...., d_M]$. Aby filtr stał się przyczynowy należy przesunąć współczynniki w prawo o M miejsc. Otrzymujemy $d = [d_0,....,d_{M-1}, d_M, d_{M+1}, ...., d_{2M}]$.

# *13.2. Filtry cyfrowe*

## Projektowanie filtrów cyfrowych IIR

### Metoda transformacji biliniowej

Określa sie wymagania dotyczące projektowanego filtru cyfrowego. Korzystając się z odpowiedniego odwzorowania dokonuje się przeliczenia wymagań projektowych dla odpowiedniego filtru analogowego. Filtr taki można zaprojektować korzytając ze znanych algorytmów np. Butterworth'a, Czebyszewa, czy też Bessela. Po wyznaczeniu charakterystyki filtru dla czasu ciągłego dokonuje się jej transformacji do czasu dyskretnego.



# 13.2. Filtry cyfrowe

## Projektowania filtrów cyfrowych IIR

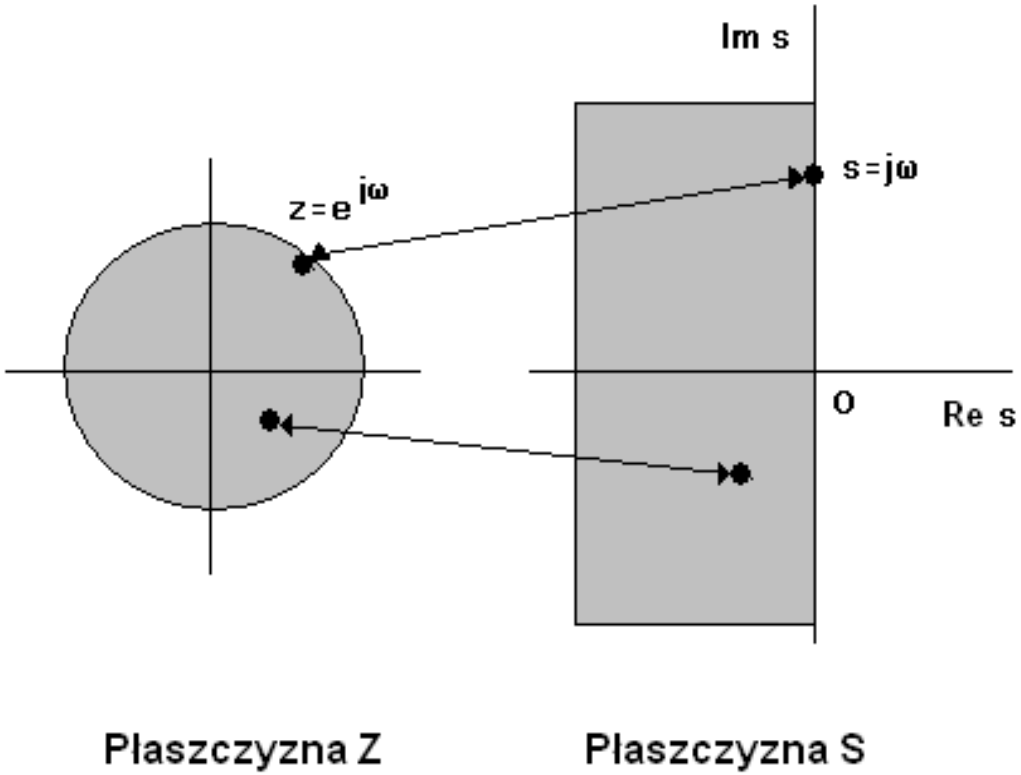
### Metoda transformacji biliniowej (cd.)

Transformacja z dziedziny *Z* (filtr cyfrowy) do dziedziny *S* (filtr analogowy) odwzorowuje wnętrze okręgu jednostkowego płaszczyzny-*Z* na lewą półpłaszczyznę-*S*, zewnętrze okręgu jednostkowego na prawą półpłaszczyznę-*S a okrąg jednostkowy na oś urojoną płaszczyzny*-S.

Funkcje służące do transformacji pomiędzy płaszczyznami mają postać:

$$s = \frac{z-1}{z+1},$$

$$z = \frac{1+s}{1-s},$$



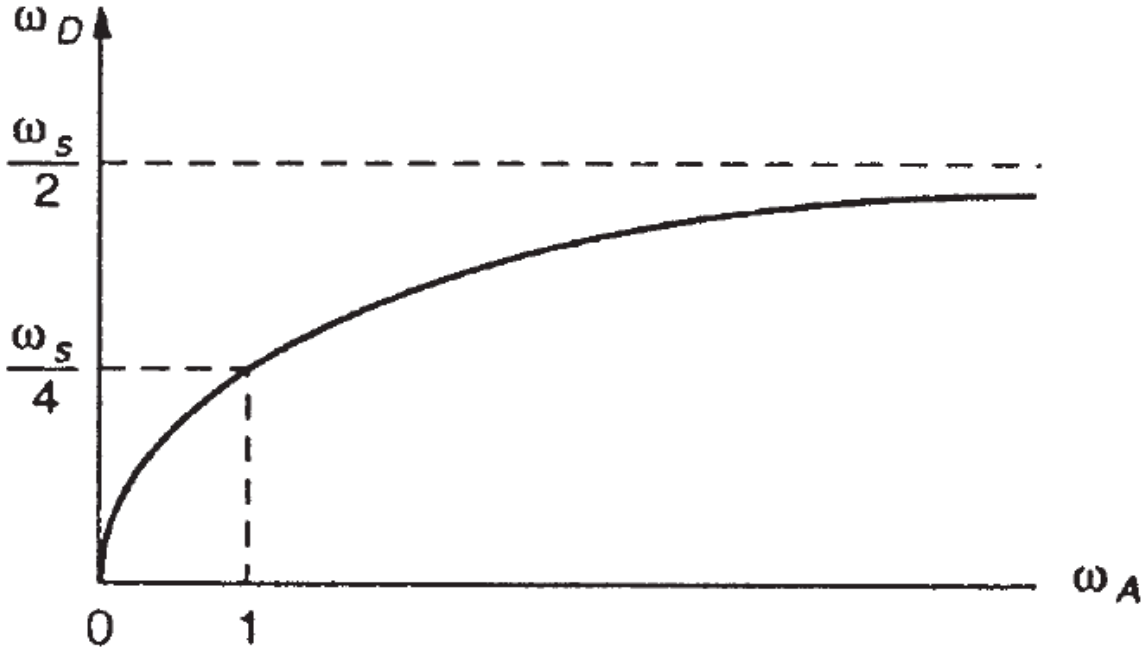
# 13.2. Filtry cyfrowe

## Projektowania filtrów cyfrowych IIR

### Metoda transformacji biliniowej (cd.)

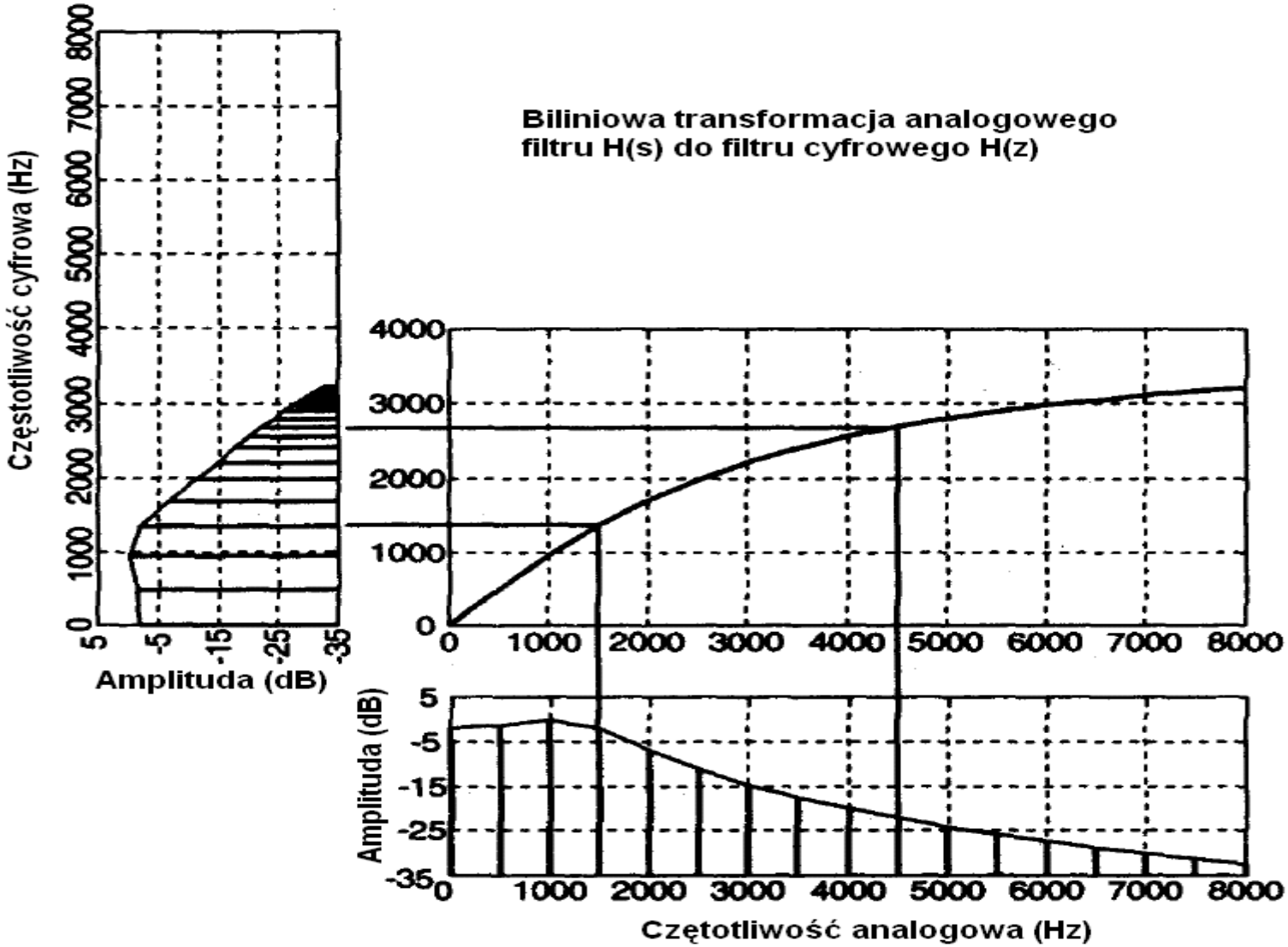
Związek pomiędzy częstotliwościa cyfrową $\omega_D$ a analogową $\omega_A$ Określa zależność:

$$\omega_A = \tan \frac{\omega_D T}{2}$$

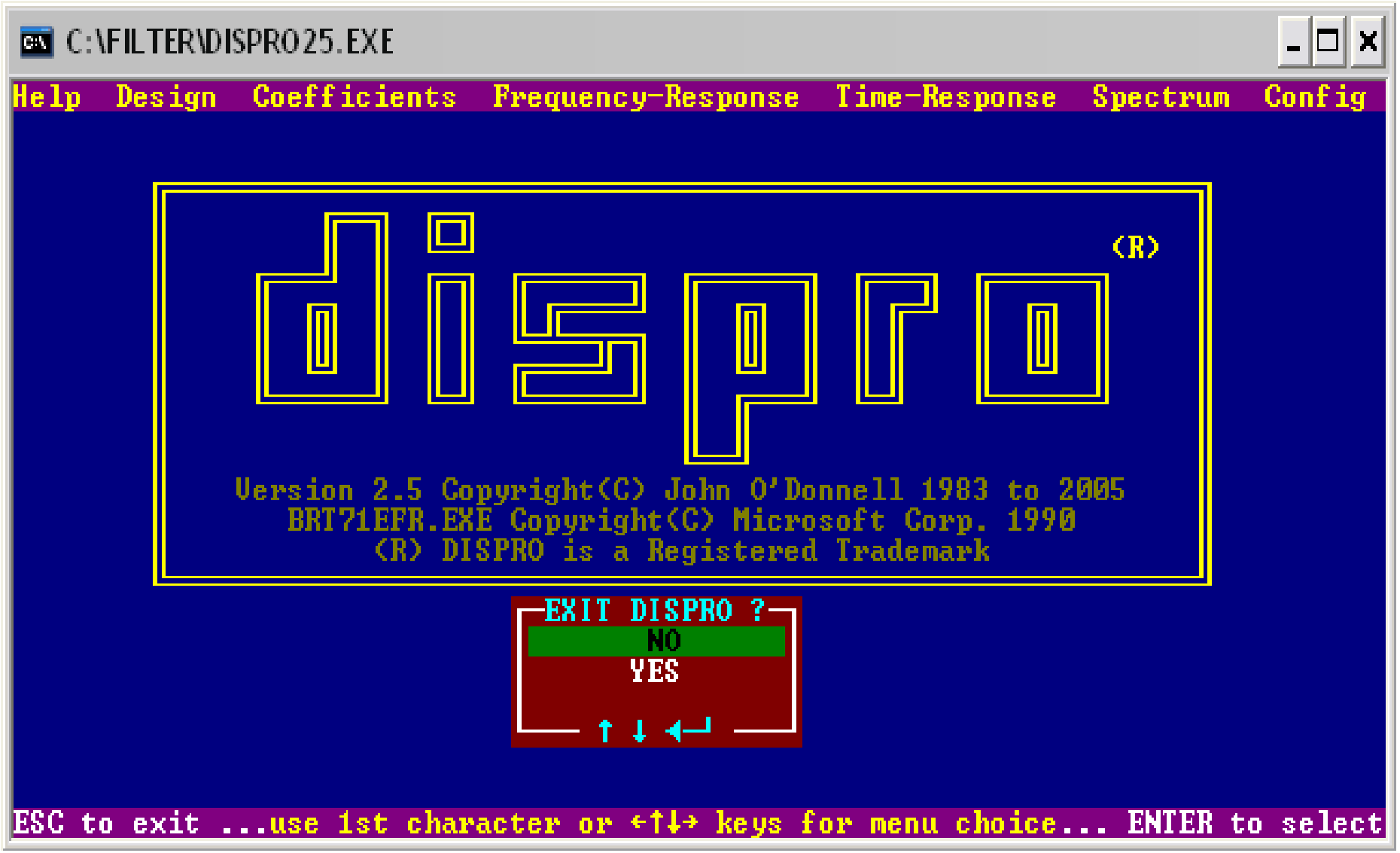


# 13.2. Filtry cyfrowe

**<u>Projektowania filtrów cyfrowych IIR:</u> Metoda transformacji biliniowej (cd.)**




Rys. Efekt biliniowej transformacji charakterystyki amplitudowej przykładowego filtru.

# 13.2. Filtry cyfrowe

**Projektowania filtrów cyfrowych:** **Program DISPRO**